دایره

مکان هندسی نقطه‌ای ثابت به فاصله‌ی معین واقع شده باشد نقطه ثابت رامرکز دایره و فاصله‌ی معین را شعاع دایره می‌گویند.

$C(O, R)$

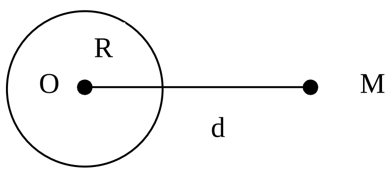
شعاع دایره

مرکز دایره

نکته‌ها

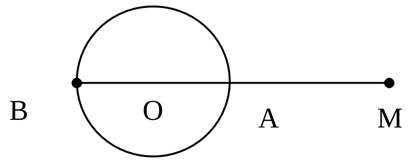
۱-وضعیت نقطه و دایره نسبت به هم:

فرض می‌کنیم فاصله ی نقطه‌ی M از مرکز دایره‌ی $C(\cdot,R)$ برابر d باشد :



- اگر d بزرگتر از R باشد $(d > R)$ نقطه خارج دایره است.
- اگر d مساوی R باشد $(d = R)$ نقطه روی دایره است.
- اگر d کوچکتر از R باشد $(d < R)$ نقطه درون دایره است.
- اگر $d = \cdot$ باشد نقطه بر مرکز دایره واقع است.

۲- نقطه M را اگر به مرکز دایره‌ی $C(\cdot,R)$ را وصل کرده ، امتداد دهیم تا دایره را در نقاط A و B قطع کند، A را نزدیکترین نقطه‌ی دایره تا M و B را دورترین نقطه‌ی دایره تا M می‌گویند.



$AB = MR - MA$

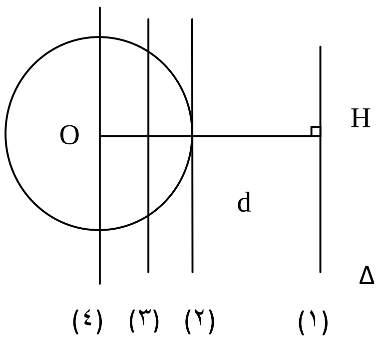
$\boxed{۲R = MB - MA}$

مثال: نزدیکترین و دورترین فاصله نقطه A تا دایره‌ی به‌ترتیب ۴ و ۸ سانتیمتر است، شعاع دایره چقدر است؟

$۲R = ۸ - ۴ \longrightarrow ۲R = ۴ \longrightarrow R = ۲$

۳- وضعیت خط و دایره نسبت به هم:

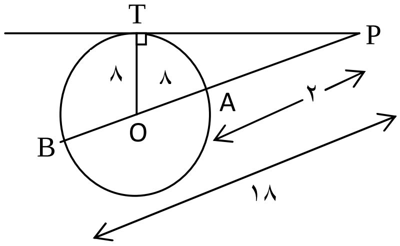
فرض می‌کنیم فاصله مرکز دایره $C(۰, R)$ از خط Δ برابر d باشد :



- اگر $d > R$ باشد، خط را خارج دایره گویند.
- اگر $d = R$ باشد، خط را مماس بر دایره گویند.(خط مماس در نقطه‌ی تماس برشعاع دایره عمود است.)
- اگر $d < R$ باشد خط و دایره را متقاطع می‌گویند.
- اگر $d = ۰$ باشد، خط بر مرکز دایره می‌گذرد.

مثال:

نزدیکترین و دورترین فاصله نقطه P ازدایره $C(۰,R)$ به ترتیب ۲ و۱۸ سانتیمتر است،اگر PT مماس بر دایره باشد طول مماس PT و مساحت مثلث OPT چقدر است ؟



$PB = ۱۸\ cm$

$PA = ۲\ cm$

$۲R = ۱۸ - ۲ = ۱۶ \longrightarrow R = ۸\ cm$

$PT^۲ + OT^۲ = OP^۲$

$PT^۲ + ۸^۲ = ۱۰^۲ \longrightarrow PT^۲ = ۱۰۰ - ۶۴$

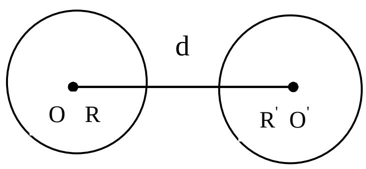
$PT^۲ = ۳۶ \qquad \boxed{PT = ۶}$

$S = ۱/۲ \times ۸ \times ۶ = ۲۴ \qquad \boxed{S = ۲۴}$

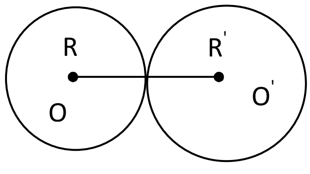
۴- وضعیت دو دایره نسبت به هم :

دو دایره $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ را با فرض $R > R'$ و $d = OO'$ در نظر می‌گیریم :

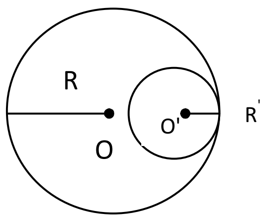
۱- اگر $d > R + R'$ باشد در دایره را متخارج می‌گویند.



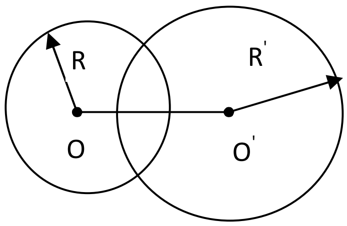
۲- اگر $d = R + R'$ باشد دو دایره را مماس خارج گویند.



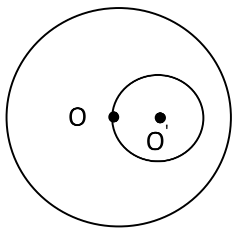
۳- اگر $d = R - R'$ باشد، دو دایره را مماس داخل گویند.



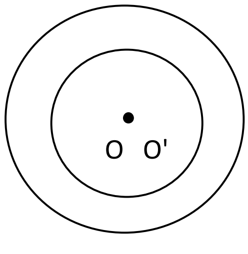
۴- اگر $R - R' < d < R + R'$ باشد ، دو دایره را متقاطع گویند.



۵- اگر $d < R - R'$ دو دایره را متداخل گویند.



۶- اگر $d = ۰$ باشد دو دایره را هم مرکز گویند.



مثال: در دو دایره تفاضل دو شعاع ۲، وطول خط‌المرکزین $\sqrt{۲}$ است. دو دایره نسبت به هم چه وضعیتی دارند؟

$$\left.\begin{array}{l} R - R' = ۲ \\ d = \sqrt{۲} \end{array}\right\} \longrightarrow d < R - R'$$

متداخل:

مثال(بسیار مهم) :

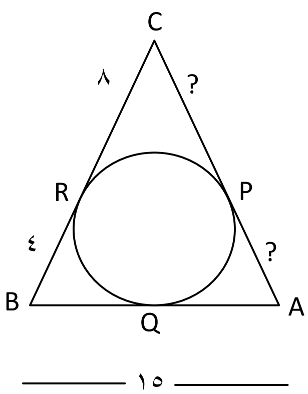
در دو دایره به شعاع‌های $R_۱ = ۲\sqrt{۲} + ۱$ و $R_۲ = \sqrt{۲} + ۱$ و خط‌المرکزین $\sqrt{۲}$ است. دو دایره نسبت به هم چه وضعی دارند؟

$d = \sqrt{۲}$

$R_۱ - R_۲ = (۲\sqrt{۲} + ۱) - (\sqrt{۲} + ۱) = ۲\sqrt{۲} + ۱ - \sqrt{۲} - ۱ = \sqrt{۲}$ $\quad d = R_۱ - R_۲$ مماس داخل

نکته: اگر از نقطه M خارج دایره $C(۰,R)$ دو مماس بر دایره رسم کنیم طول مماس‌ها با هم برابرند.

مثال : با توجه به شکل اندازه‌ی ضلع AC را بیابید :



$BQ = BR = ۴$

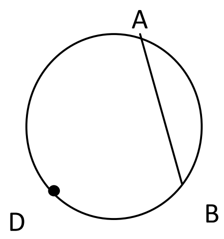
$AQ = ۱۵ - ۴$

$AP = ۱۱$

$CP = CR = ۸ \longrightarrow AC = ۱۱ + ۸ = ۱۹$

تعریف وتر :

پاره خطی است که دو نقطه‌ی متمایز از دایره را بهم وصل می‌کند .



تعریف کمان :

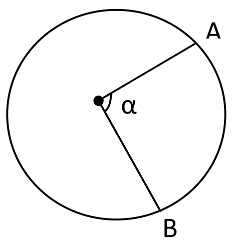
هر وتر دایره را به دو قسمت تقسیم می‌کند که هر قسمت را یک کمان می‌گویند.

مانند : $\overset{\frown}{AB}$ و $\overset{\frown}{ADB}$

تعریف زاویه‌ی مرکزی :

زاویه‌ای که راس‌اش مرکز دایره و ضلع‌هایش شعاع‌هایی از دایره باشد.

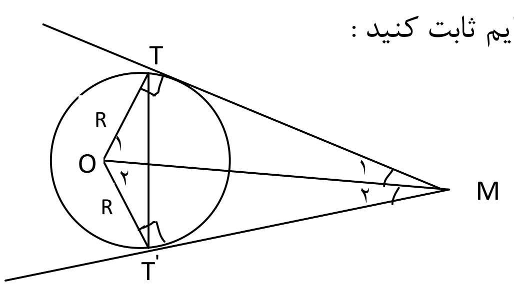
بنا به قرارداد اندازه‌ی هر زاویه مرکزی برابر است با اندازه‌ی کمان روبه‌روی آن .



$\overline{AB} = \hat{\alpha}$

مثال :

از نقطه‌ی M دو مماس MT و MT' را بر دایره $C(۰,R)$ رسم کرده‌ایم ثابت کنید :



الف) طول مماس‌ها با هم برابرند. ($MT = MT'$)

$$\left.\begin{array}{l}\hat{T} = \hat{T'} = ۹۰ \\ OT = OT' = R \\ OM = OM\end{array}\right\} \quad \overset{\triangle}{OTM} \equiv \overset{\triangle}{OT'M} \longrightarrow MT = MT'$$

ب) OM نیمساز زوایای TMT' و TOT' است:

$$\overset{\triangle}{OTM} \equiv \overset{\triangle}{OT'M} \quad \left\{\begin{array}{l}\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ \\ \hat{M}_۱ = \hat{M}_۲\end{array}\right.$$

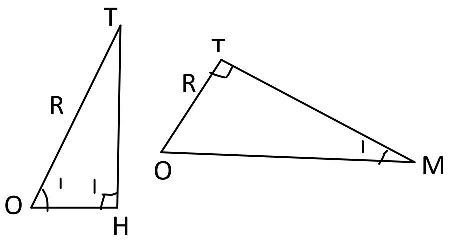
ج) OM عمود منصف TT' است :

برای دو مثلث متساوی‌الساقین OTT' و MTT' خط OM چون نیمساز زوایای راس بوده بنابر این در حکم عمودمنصف قاعده‌ی مشترک یعنی TT' خواهد بود.

(نیمساز در مثلث متساوی‌الساقین در حکم عمودمنصف است).

د) $R^۲ = OH \,.\, OM$

مثلث‌های $\overset{\triangle}{OTH}$ و $\overset{\triangle}{OTM}$ را در نظر می‌گیریم :

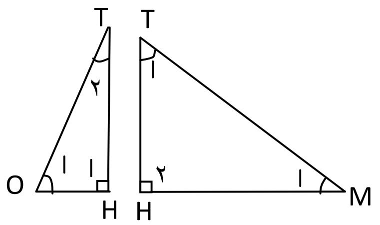


$$\left.\begin{array}{l}\hat{O}_۱ = \hat{T}_۱ \\ \hat{H}_۱ = \hat{T} = ۹۰\end{array}\right\} \quad \overset{\triangle}{OTH} \sim \overset{\triangle}{OTM} \longrightarrow \frac{OH}{OT} = \frac{OT}{OM}$$

$OH \cdot OM = OT \cdot OT \longrightarrow OH \cdot OM = OT^{۲} \longrightarrow \boxed{R^{۲} = OH \cdot OM}$

و) $TT'^{۲} = ۴\ OH \cdot HM$

مثلث‌های $\overset{\triangle}{OTH}$ و $\overset{\triangle}{THM}$ را در نظر می‌گیریم :



$$\left.\begin{array}{l}\widehat{O}_{۱} + \widehat{T}_{۱} = ۹۰ \\ \widehat{T}_{۱} + \widehat{T}_{۲} = ۹۰\end{array}\right\} \longrightarrow \left.\begin{array}{l}\widehat{O}_{۱} = \widehat{T}_{۲} \\ \widehat{H}_{۱} = \widehat{H}_{۲} = ۹۰\end{array}\right\} \longrightarrow \overset{\triangle}{OTH} \sim \overset{\triangle}{THM}$$

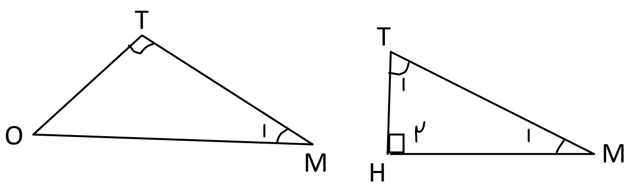
$$\frac{OH}{TH} = \frac{TH}{HM} \qquad TH^{۲} = OH \cdot HM$$

$$\left(\frac{۱}{۲}\ TT'\right)^{۲} = OH \cdot HM$$

$$\frac{۱}{٤}\ TT'^{۲} = OH.HM \longrightarrow TT'^{۲} = ٤\ OH.HM$$

ه) $TT' \cdot OM = ۲R \cdot MT$

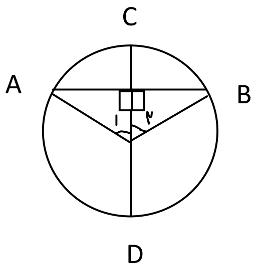
مثلث‌های $\overset{\triangle}{THM}$ و $\overset{\triangle}{OTM}$ را در نظر می‌گیریم :



$$\left.\begin{array}{l}M_{۱} = M_{۲} \\ T = H_{۲} = ۹۰\end{array}\right\} \longrightarrow THM \sim TOM \longrightarrow \frac{OM}{MT} = \frac{OT}{TH}$$

$TH \cdot OM = OT \cdot MT \qquad \frac{1}{2}\ TT' \cdot OM = R \cdot MT$

$$\boxed{TT' \cdot OM = ۲R \cdot MT}$$



قضیه : در هر دایره قطر عمود بر وتر ، آن وتر و کمان‌های نظیر آن را نصف می‌کند .

فرض : $AB \perp CD$

حکم : $AH = BH$, $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD}$

برهان : O را به نقاط A و B وصل می‌کنیم.

از $OA = OB = R$ نتیجه می‌شود مثلث $\overset{\triangle}{OAB}$ متساوی‌الساقین بوده و OH در حکم ارتفاع وارد بر قاعده است. بنابراین :

اولاً : در حکم میانه است : $AH = BH$

ثانیاً : در حکم نیمساز زاویه‌ی راس است.

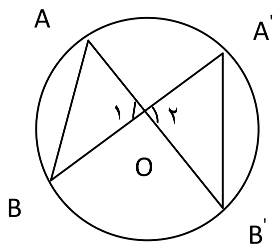
$$\hat{O}_1 = \hat{O}_2 \longrightarrow \boxed{\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BC}}$$

چون CD قطر دایره است.

(می‌دانیم قطر دایره را به دو قسمت مساوی تقسیم میکند).

$$\begin{array}{l} \overset{\frown}{CAD} = \overset{\frown}{CBD} \\ -\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BC} \\ \hline \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD} \end{array}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD}}$$



قضیه : کمانهای نظیر وترهای مساوی با هم برابرند و برعکس .

فرض : $AB = A'B'$

حکم : $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B'}$

برهان : O را به نقاط A, B, A', B' وصل می‌کنیم :

$$\left.\begin{array}{l} OA = OA' = R \\ OB = OB' = R \\ AB = A'B' \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ضضض}} \overset{\triangle}{OAB} \equiv \overset{\triangle}{OA'B'} \qquad \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \qquad \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B'}$$

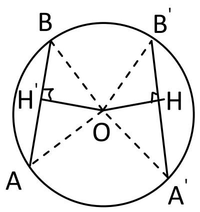
(زاویه مرکزی)

عکس قضیه :

فرض : $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B'}$

حکم : $AB = A'B'$ (وتر)

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\frown}{AP} = \overset{\frown}{A'B'} \rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ OA = OA' = R \\ OB = OB' = R \end{array}\right\} \underset{\text{ضزض}}{\overset{\triangle}{OAB} \equiv \overset{\triangle}{OA'B'}} \rightarrow AB = A'B'$$



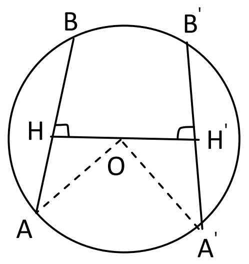
قضیه : در هر دایره وترهای مساوی از مرکز دایره به یک فاصله‌اند و برعکس .

فرض : $AB = A'B'$

حکم : $OH = OH'$

برهان : Oرا به نقاط A , B , A' , B' وصل می‌کنیم :

$$\left.\begin{array}{l} OA = OA' = R \\ OB = OB' = R \\ AB = A'B' \end{array}\right\} \quad \overset{\triangle}{OAB} \equiv \overset{\triangle}{OA'B'} \rightarrow OH = OH'$$



عکس قضیه : وترهایی که از مرکز به یک فاصله باشند با هم برابرند.

فرض : $OH = OH'$

حکم : $AB = A'B'$

مثلث‌های $\overset{\triangle}{OAH}$ و $\overset{\triangle}{OA'H'}$ را در نظر می‌گیریم :

$$\left.\begin{array}{l} H = H' = ۹۰ \\ OH = OH' \\ OA = OA' = R \end{array}\right\} \quad \overset{\triangle}{OAH} \equiv \overset{\triangle}{OA'H'} \quad AH = A'H' \rightarrow ۱/۲AB=۱/۲A'$$

$$\rightarrow \boxed{AB = A'B'}$$

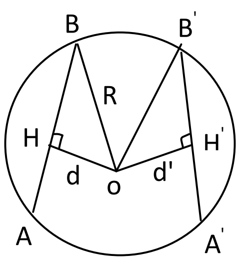
قضیه :

از دو وتر نابرابر آنکه بزرگتر است به مرکز دایره نزدیکتر است و برعکس .

$AB = L$, $A'B' = L'$, $OH = d$, $OH' = d'$

فرض: $L > L'$

حکم : $d < d'$



برهان : o را به B و B' وصل می‌کنیم بنا به رابطه فیثاغورس خواهیم داشت :

$$\overset{\triangle}{OBH}: BH^2 + OH^2 = OB^2 \quad (1/2L)^2 + d^2 = R^2 \rightarrow \boxed{1/4\,L^2 + d^2 = R^2} \quad 1$$

$$\overset{\triangle}{OB'H'}: B'H'^2 + OH'^2 = OB'^2 \quad (1/2L')^2 + d'^2 = R^2 \rightarrow \boxed{1/4L'^2 + d'^2 = R^2} \quad 2$$

$$1 \text{ و } 2 \quad 1/4L^2 + d^2 = 1/4\,L'^2 + d'^2 \longrightarrow \boxed{1/4L^2 - 1/4L'^2 = d'^2 - d^2} \quad 3$$

$$: L > L' \longrightarrow L^2 > L'^2 \longrightarrow 1/4L^2 > 1/4L'^2$$

$$\longrightarrow 1/4L^2 - 1/4L'^2 > 0$$

$$3 \quad d'^2 - d^2 > 0 \longrightarrow d'^2 > d^2 \longrightarrow d' > d$$

عکس قضیه :

برهان خلف

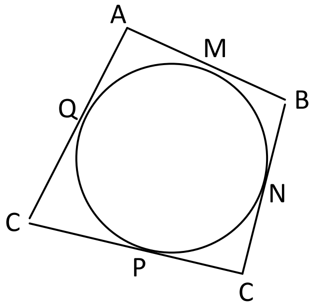
فرض : $d < d'$

حکم : $L > L'$

اگر فرض خلف $: L \not> L' \begin{cases} L = L' \longrightarrow d = d' \times \\ L < L' \longrightarrow d > d' \times \end{cases} \longrightarrow L > L'$

دایره محاطی :

به دایره‌ای گفته می‌شود که بر اضلاع یک چند ضلعی مماس باشد.

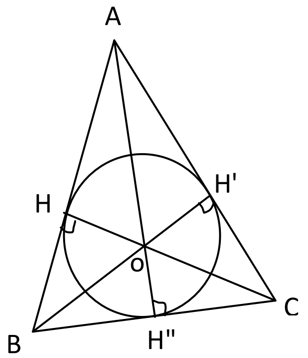


چند ضلعی محیطی : به چند ضلعی که دایره‌ی محاطی مماس بر اضلاع آن می‌گذرد، چند ضلعی محیطی گفته می‌شود.

دایره محاطی مثلث :

میدانیم سه نیمساز زوایای داخلی هر مثلث همرسند . و نقطه‌ی همرسی آن‌ها از سه ضلع مثلث به یک فاصله است. $OH = OH' = OH''$.

بنابراین اگر به مرکز O و شعاع OH دایره‌ای رسم کنیم این دایره در نقاط H , H' , H'' بر سه ضلع مثلث مماس خواهد بود . این دایره را دایره محاطی درونی مثلث می‌گویند.



$OH = OH' = OH''$

$$R = \frac{s}{p}$$

s: مساحت مثلث

p: نصف محیط مثلث

اندازه‌ی نیم‌ساز درونی A $\qquad d = \frac{۲}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$

نکته : هر مثلث فقط یک دایره محاطی درونی دارد.

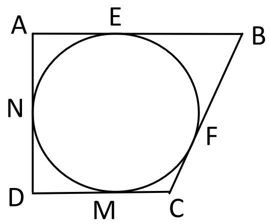
نکته : هر مثلث سه دایره محاطی خارجی دارد.

چهار ضلعی محیطی :

چهار ضلعی را محیطی گویند هرگاه خاصیت زیر را داشته باشد.

قضیه : در هر چهارضلعی محیطی مجموع ۲ ضلع مقابل برابر است با مجموع دو ضلع دیگر.

حکم : $AB + DC = AD + BC$



می‌دانیم : اگر از نقطه‌ای خارج دایره دو مماس رسم شود طول مماس‌ها برابرند.

$AN = AE$

$DN = DM$

$BF = BE$

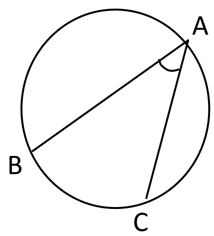
$CF = CM \quad +$

$(AN + DN) + (BF + FC) = (AF + EB) + (CM + MD)$

$AD + BC = AB + CD$

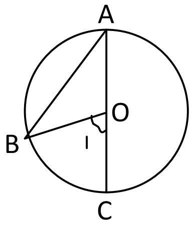
تعریف زاویه محاطی :

زاویه‌ای است که راس آن روی دایره و اضلاعش وترهایی از دایره باشند.



قضیه :

نشان دهید اندازه‌ی هر زاویه محاطی برابر است با نصف اندازه کمان روبه‌روی آن .



قضیه را در سه حالت اثبات می‌کنیم :

حالت اول : یک ضلع زاویه‌ی محاطی قطر دایره باشد.

برهان : O را به نقطه‌ی B وصل می‌کنیم.

$$\overset{\triangle}{OAB} : \begin{cases} OA = OB & \hat{A} = \hat{B} \\ \hat{O}_1 = \hat{A} + \hat{B} & \hat{O}_1 = 2\hat{A} \end{cases}$$

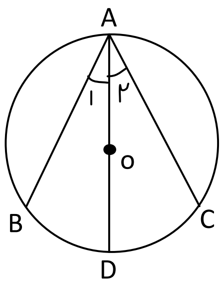
زاویه خارجی : مجموع دو زاویه داخلی غیر مجاور

زاویه مرکزی $\hat{O}_1 = \overset{\frown}{BC}$ $\qquad 2\hat{A} = \overset{\frown}{BC}$ $\qquad \hat{A} = 1/2\ \overset{\frown}{BC}$

حالت دوم :

مرکز دایره درون زاویه‌ی محاطی باشد.

برهان : قطر AD را رسم می‌کنیم بنا به حالت اول خواهیم داشت :

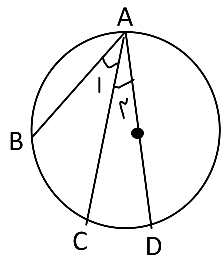


$$\hat{A}_1 = 1/2\overset{\frown}{BD}$$

$$\hat{A}_2 = 1/2\overset{\frown}{DC}$$

$$\hat{A} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \tfrac{1}{2}(\overset{\frown}{BD} + \overset{\frown}{DC}) \longrightarrow \hat{A} = 1/2\overset{\frown}{BC}$$

حالت سوم : مرکز دایره خارج زاویه‌ی محاطی باشد.



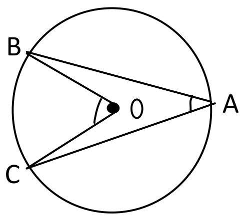
برهان : قطر AD رارسم می‌کنیم بنا به حالت اول خواهیم داشت :

$\hat{A}_{۱} = ۱/۲\overset{\frown}{BD}$

$\hat{A}_{۲} = CAD = ۱/۲\overset{\frown}{CD}$

$\hat{A} = \hat{A}_{۱} - \hat{A}_{۲} = ۱/۲\overset{\frown}{BD} - ۱/۲\overset{\frown}{CD} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{BD} - \overset{\frown}{CD}) = ۱/۲\overset{\frown}{BC}$

مثال : در شکل مقابل $\hat{A} + \hat{O} = ۱۶۵°$ است. اندازه‌ی زاویه‌ی $\hat{A}$ چقدر است ؟



محاطی $\hat{A} = ۱/۲\overset{\frown}{BC}$

مرکزی $\hat{O} = \overset{\frown}{BC}$

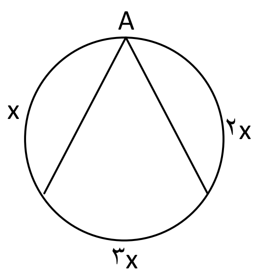
$\hat{O} = ۲\hat{A}$

بنا به فرض $\hat{A} + \hat{O} = ۱۶۵ \longrightarrow \hat{A} + ۲\hat{A} = ۱۶۵°$

$A = ۱۶۵/۳ = ۵۵°$ $\quad A = ۵۵°$

مثال :

با توجه به شکل اندازه‌ی A چقدر است ؟



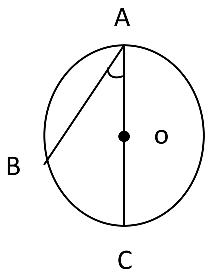
$x + ۲x + ۳x = ۳۶۰ \quad x = ۳۶۰/۶ \quad x = ۶۰$

$A = ۱/۲ \times ۳x = ۱/۲ \times ۳ \times ۶۰ = ۹۰$

$\boxed{A = ۹۰}$

مثال :

اگر AC قطر دایره و زاویه‌یA $A = ۴۰°$ باشد، اندازه کمان $\overset{\frown}{AB}$ چقدر است ؟

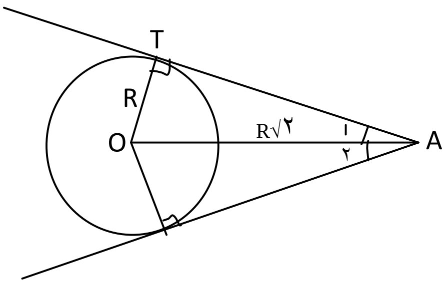


$A = ۴۰ \qquad A = ۱/۲\ \overset{\frown}{BC} \qquad \overset{\frown}{BC} = ۲\times۴۰ = ۸۰$

$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} = ۱۸۰ \qquad AB = ۱۸۰ - ۸۰$

$\overset{\frown}{AB} = ۱۰۰$

مثال : از نقطه A دو مماس بر دایره به شعاع R رسم شده است ، اگر فاصله‌ی A تا مرکز دایره $R\sqrt{۲}$ باشد،زاویه‌ی بین دو مماس چقدر است ؟

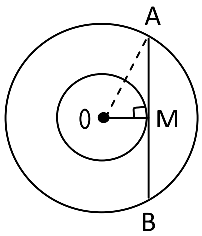


$A_۱ = A_۲ \qquad A = ۲A_۱$

$\sin A_۱ = \frac{R}{R\sqrt{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

$A_۱ = ۴۵^\circ \qquad TAT' = ۹۰^\circ$

مثال: دو دایره هم‌مرکز به شعاع‌های ۱و ۲ مفروض‌اند، طول وتری از دایره بزرگتر بر دایره کوچکتر مماس باشد چقدر است ؟



$OA^۲ = OM^۲ + AM^۲$

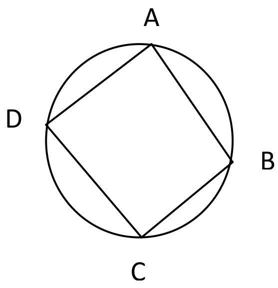
$۲^۲ = ۱^۲ + AM^۲ \qquad ۴ = ۱ + AM^۲$

$AM^۲ = ۳ \qquad AM = \sqrt{۳}$

$AB = ۲AM = ۲\sqrt{۳} \qquad \boxed{AB = ۲\sqrt{۳}}$

چند ضلعی محاطی :

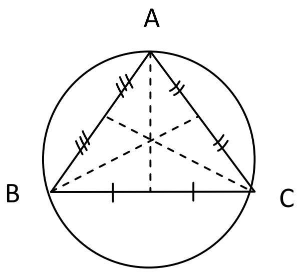
به چند ضلعی گفته می‌شود که همه روس آن بر محیط دایره واقع باشد.به دایره‌ای که بر روس چند ضلعی می-گذرد دایره محیطی چند ضلعی گفته می‌شود.



دایره محیطی مثلث :

می‌دانیم سه عمودمنصف اضلاع هر مثلث همرسند. ونقطه‌ی همرسی آن‌ها از سه راس مثلث به یک اندازه است :

OA = OB = OC بنابراین اگر به مرکز O و شعاع OA دایره‌ای رسم کنیم این دایره بر سه راس مثلث می-گذرد و به آن دایره‌ی محیطی مثلث می‌گویند.



$$OA = OB = OC = R$$

نکته : هر مثلث فقط یک دایره‌ی محیطی دارد.

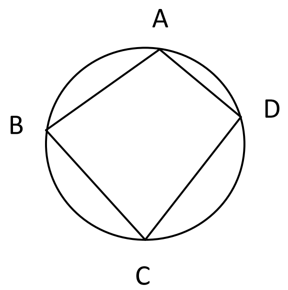
$$R = \frac{abc}{٤s}$$

چهارضلعی محاطی :

برعکس مثلث همه چهارضلعی‌ها دایره محیطی ندارند.چهارضلعی را محاطی گویند هرگاه خاصیت زیر را داشته باشد :

قضیه مهم :

در هر چهارضلعی محاطی زوایای روبه‌رو مکمل یکدیگرند.



فرض : ABCD محاطی است.

حکم : $\begin{cases} A + C = ۱۸۰ \\ B + D = ۱۸۰ \end{cases}$

برهان :

$A = ۱/۲\,\overset{\frown}{BCD}$

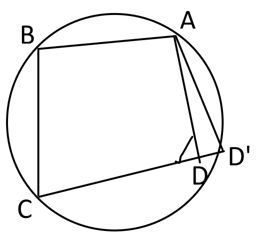
$C = ۱/۲\,\overset{\frown}{BAD}$

$A + C = ۱/۲ \times ۳۶۰ = ۱۸۰$

$B + D = ۱۸۰$

عکس قضیه :

چهارضلعی که زوایای روبه‌رویش مکمل هم باشند محاطی است.



فرض : $\begin{cases} A + C = ۱۸۰ \\ B + D = ۱۸۰ \end{cases}$

حکم : ABCD محاطی است .

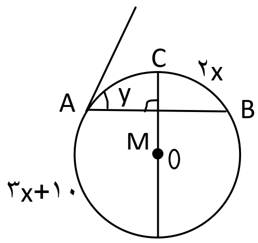
دایره‌ی محیطی مثلث ABC را رسم می‌کنیم . فرض می‌کنیم این دایره از نقطه‌ی D نگذرد در این صورت CDرا امتداد می‌دهیم تا دایره‌ی محیطی مثلث از نقطه‌ی D' قطع نماید و چهارضلعی ABCD' محاطی خواهد بود.

بنا به تعریف $B + D' = ۱۸۰$
بنا به فرض $B + D = ۱۸۰$
$\boxed{D = D'}$ ۱

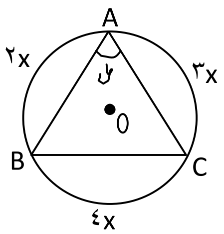
$\overset{\triangle}{ADD'}$ $\boxed{D > D'}$ ۲

دو نتیجه بدست آمده چون با هم در تناقض هستند بنابراین نتیجه می‌گیریم دایره‌ی محیطی مثلث ABC حتماً از نقطه‌ی D می‌گذرد.

مثال : در شکل مقابل قطر CD بر وتر AB عمود است و AT بر دایره مماس است. اگر $\overset{\frown}{CB} = ۲x$ و $\overset{\frown}{AD} = ۳x + ۱۰$ و $T\hat{A}B = y°$ آنگاه x و y را محاسبه کنید :



مثال : مقدار x وy را بدست آورید :



$۲x + ۳x + ۴x = ۳۶۰$

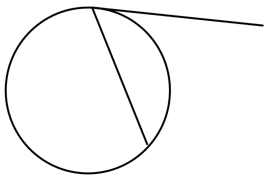
$۹x = ۳۶۰ \quad \underline{x= ۴۰}$

$A = ۱/۲BC \qquad y= ۱/۲BC$

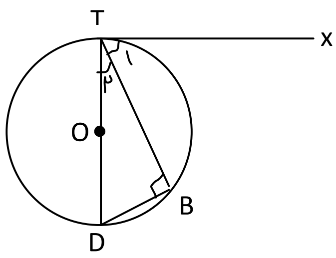
$Y = ۱/۲×۴x =۱/۲×۴×۴۰ = ۸۰ \qquad \underline{y = ۸۰}$

زاویه ظلی :

به زاویه‌ای گفته می‌شود که راس آن بر محیط دایره، یک ضلعش مماس بر دایره و ضلع دیگرش وتری از دایره باشد .



قضیه : نشان دهید اندازه زاویه ظلی برابر است با نصف کمان روبه‌روی آن .



فرض : $T_۱$ زاویه ظلی

حکم : $\hat{T}_۱ = ۱/۲\overset{\frown}{TB}$

برهان : قطر TD را رسم کرده و D را به B وصل می‌کنیم.

$B = ۱/۲\overset{\frown}{TD} = ۱/۲ \times ۱۸۰ = ۹۰ \qquad B = ۹۰$

$\overset{\triangle}{TBD}: \quad B = ۹۰ \quad T_۲ + D = ۹۰$

$XT \quad TD \quad T_۱ + T_۲ = ۹۰$

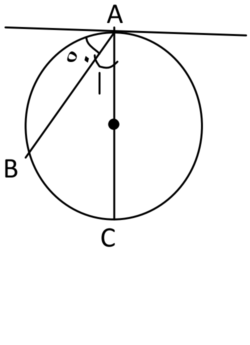
محاطی

$T_۱ = D = ۱/۲\overset{\frown}{TB}$

ظلی

مثال : در شکل زیر زاویه ظلی A برابر ۵۰ درجه است. اندازه‌ی کمان BC چقدر است ؟

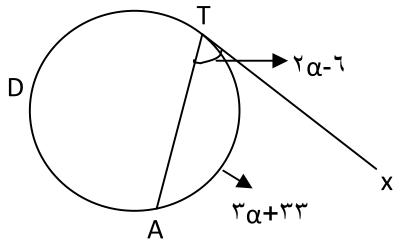
حل:



$A_۱ = ۹۰ - ۵۰ = ۴۰$

$\overset{\frown}{BC} = ۸۰$ $A_۱=۱/۲\overset{\frown}{BC}$ محاطی

مثال : اگر زاویه‌ی ظلی ATX برابر ۶- ۲α اندازه کمان $\overset{\frown}{AT}$ برابر $۳\alpha+۳۳$ باشد، مقدار α ، اندازه‌ی زاویه‌ی ATX چقدر است ؟



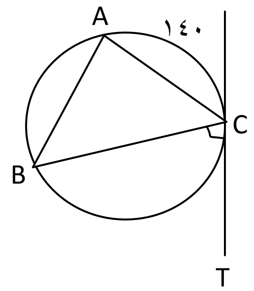
$A\hat{T}X =۱/۲\overset{\frown}{AT}$

$۲\alpha - ۶ =۱/۲(۳\alpha+۳۳)$

$۴\alpha -۱۲ = ۳\alpha + ۳۳$ $\alpha = ۴۵$

$A\hat{T}X = ۲\alpha - ۶ = ۲\times۴۵ -۶ = ۸۴^\circ$

مثال : در شکل روبه‌رو AB = AC و CT مماس بر دایره در نقطه‌ی C ، $\overset{\frown}{AC} = ۱۴۰$ اندازه‌ی زاویه‌ی BCT را بیابید :



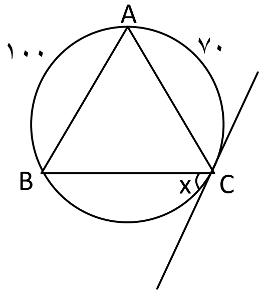
$AB = AC$ $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC}$

$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC} = ۱۴۰$

$\overset{\frown}{BC}= ۳۶۰ - ۲\times۱۴۰ = ۸۰$

$B\hat{C}T = ½ \overset{\frown}{BC} = ۱/۲\times۸۰ = ۴۰$

مثال : مقدار x را در شکل زیر بیابید :



$\hat{X} = ۱/۲\overset{\frown}{BC} =۱/۲\times۱۹۰=۹۵$

$\overset{\frown}{BC}= ۳۶۰-(۱۰۰+۷۰) = ۳۶۰ - ۱۷۰ = ۹۰$

$X= ۹۵$

کمان درخور زاویه‌ی α :

کمانی است که هر نقطه‌ی آن راس زاویه‌ی برابر α بوده و اضلاعش از دو نقطه‌ی ثابت می‌گذرد.

قضیه : مکان هندسی راس زاویه‌ای برابر α که اضلاعش از دو نقطه‌ی ثابت می‌گذرند کمانهایی که از دو دایره متساوی بوده که زاویه‌ی متقابل به وتر مشترکشان برابر ۲α است.

ابتدا عمودمنصف پاره‌خط AB رارسم پس از Aخطی چنان رسم می‌کنیم که با AB زاویه‌ی $۹۰-\alpha$تشکیل دهد، این خط عمودمنصف AB را در نقطه‌ی o قطع کرده و داریم :

$$A\hat{o}H = \alpha$$

اگر به مرکز o وشعاع OA دایره‌ای رسم کنیم این دایره از نقطه‌ی B نیز می‌گذرد.

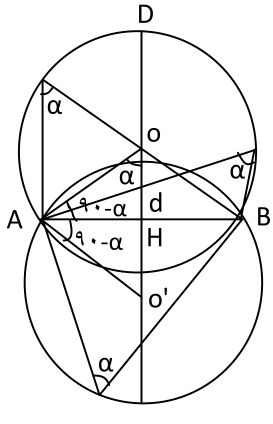
وچون OAB متساوی‌الساقین بوده و OH در حکم ارتفاع است.

بنابراین می‌تواند نیمساز زاویه‌ی راس باشد.

$$\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ = \alpha$$

$$A\hat{o}B = ۲\alpha \longrightarrow \overset{\frown}{AB} = ۲\alpha$$

کمان بزرگتر یعنی ADB مکان هندسی مورد نظر است زیرا هر نقطه مانند M را روی آن در نظر می‌گیریم و بهA وB وصل کنیم
یک زاویه‌ی محاطی مقابل به $\overset{\frown}{AB} = ۲\alpha$ ایجاد می‌شود.



عمودمنصف

نکته ۱ : کمان کوچکتر ، کمان درخور زاویه‌ی $۱۸۰-\alpha$ است زیرا :

$\overset{\frown}{AB} = ۲\alpha \longrightarrow \overset{\frown}{ADB} = ۳۶۰ - ۲\alpha$

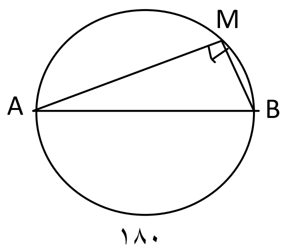
حال اگر هر نقطه مانند P را روی کمان کوچکتر در نظر بگیریم و آن را به A وB وصل کنیم.

یک زاویه‌ی یک زاویه‌ی محاطی مقابل به کمانADB ایجاد می‌شود.

$\overset{\frown}{APB} = ۱/۲\overset{\frown}{ADB} = ½(۳۶۰ - ۲\alpha) = ۱۸۰-\alpha$

نکته ۲ : نقاط A وB جزو هیچکدام از کمان درخورهای α و $۱۸۰-\alpha$ نمی‌باشد.

نکته ۳ : کمان درخور زاویه ۹۰ کمانی از دایره است بطوریکه AB قطر دایره می‌باشد.



نکته ۴ : شعاع دایره‌ای که کمان درخور α بخشی از آن است از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید.

$OAH : \sin \propto = \frac{AH}{OA} \longrightarrow \sin \propto = \frac{۱/۲AB}{R}$

$R = \frac{AB}{۲\sin\propto}$ شعاع

نکته ۵ : فاصله‌ی مرکز دایره از وتر AB را از رابطه‌ی زیر بدست می‌آوریم :

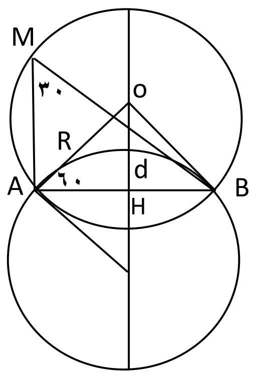
$\tan \propto = \frac{AH}{OH} \Longrightarrow \tan \propto = \frac{۱/۲AB}{d} \longrightarrow d = \frac{AB}{۲\tan\propto}$

مثال : پاره‌خط AB به طول ۳cm مفروض است :

الف : کمان درخور زاویه‌ی 30° را رسم کنید.

ب : شعاع دایره کمان درخور چقدر است ؟

ج: فاصله‌ی مرکز این دایره از پاره‌خط AB را پیدا کنید (سهم)



الف

OH = d

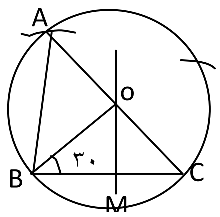
OA = R

$$R = \frac{AB}{2\sin 30} = \frac{3}{2\times 1/2} = 3$$ ب

$$d = \frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{2\tan 30}} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2\times\frac{\sqrt{3}}{3}}} = \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{2\sqrt{3}}} = \frac{\mathbf{9\sqrt{3}}}{\mathbf{6}} = \frac{\mathbf{3\sqrt{3}}}{\mathbf{2}}$$ ج

مثال : مثلث ABC را با معلوم بودن $BC = 4cm$ و $A = 60^\circ$ و میانه $AM = 3cm$ رسم کنید :

حل : ابتدا پاره‌خط BC را به‌طول 4cm رسم می‌کنیم سپس کمان درخور زاویه‌ی ۶۰ را رسم می‌کنیم به مرکز M و به شعاع ۳ cm کمانی رسم می‌کنیم تا کمان درخور زاویه‌ی ۶۰ را در نقطه‌ی A قطع کند مثلث ABC جواب مسئاله است.

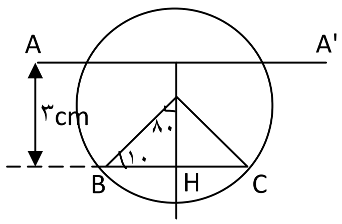


بحث :

۱) اگر کمان به مرکز **M** و شعاع **۳cm** کمان درخور زاویه‌ی ۶۰ را در دو نقطه قطع کند مسئله چهار جواب دارد.(چون دایره پایینی را باید در نظر گرفت).
۲) اگر کمان به مرکز **M** و شعاع **۳cm** بر کمان درخور زاویه‌ی ۶۰ مماس باشد مسئله دو جواب دارد.
۳) اگر کمان به مرکز **M** و شعاع **۳cm** کمان درخور زاویه‌ی ۶۰ را قطع نکند مسئله جواب ندارد.

مثال : مثلث ABC را با معلوم بودن ضلع BC=۶cm **و** زاویه‌ی**A=۸۰** و ارتفاع AH=**۳**cm رسم کنید :

ابتدا پاره‌خط BC را به طول۶cm رسم نموده سپس کمان درخور زاویه‌ی ۸۰ را رسم می‌کنیم.



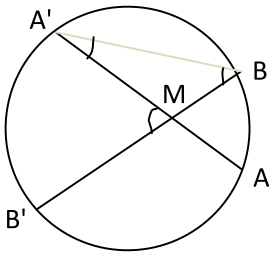
برای بدست آوردن راس**A** کافی است در امتداد **BC** عمودی به‌طول **۳cm** بر آن وارد کنیم سپس از انتهای عمود، خطی موازی با **BC** رسم رسم می‌کنیم تا کمان درخور زاویه‌ی ۸۰ را در**A** قطع کند. مثلث **ABC**جواب مسئله است.

بحث :

۱) اگر خط موازی با**BC** کمان درخور زاویه‌ی ۸۰ را در دو نقطه قطع کند مسئله چهار جواب دارد.
۲) اگر خط موازی با**BC** کمان درخور مماس باشد مسئله دو جواب دارد.
۳) اگر خط موازی با**BC** کمان درخور را قطع نکند مسئله جواب ندارد.

روابط زاویه :

قضیه : هر گاه دو وتر درون دایره متقاطع باشند، ثابت کنید اندازه‌ی زاویه‌ی بین دو وتر برابر با نصف مجموع دو کمان.



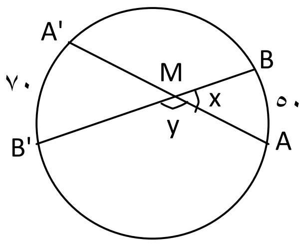
فرض : **M** درون دایره **AA' ∩ BB' ={ M }**

حکم : **M = ½(A'B'⌢+AB⌢)**

برهان : از **A'** به **B** وصل می‌کنیم :

M = A'+B = ۱/۲**AB⌢+** ۱/۲**A'B'⌢ = ½(AB⌢ +A'B'⌢)**

مثال : مقادیر **x** و**y** را بیابید.



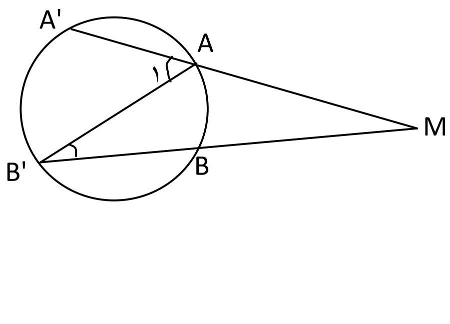
X̂ = ½(AB⌢+A'B'⌢)

X=۱/۲**(**۵۰+۷۰**) =** ۱۲۰/۲=۶۰

X = ۶۰

x+y=۱۸۰ ⟶ ۶۰+**y=**۱۸۰ ⟶ **y=**۱۲۰

قضیه : هرگاه دو وتر برون دایره متقاطع باشند اندازه‌ی بین آنها برابر نسبت قدرمطلق تفاضل کمان‌های بین آن دو وتر.



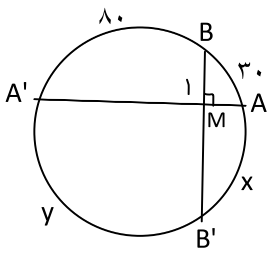
فرض : برون دایره ← **M**   **AA'∩BB' ={ M}**

حکم : $\hat{M} = \frac{1}{2}|\overset{\frown}{A'B'} - \overset{\frown}{AB}|$

برهان : A را به B' وصل می‌کنیم برای مثلث $\overset{\triangle}{MAB'}$ زاویه $\hat{A}_۱$ زاویه خارجی بوده داریم :

$\hat{A}_۱ = \hat{B}' + \hat{M}$ $\qquad$ $\hat{M} = \hat{A}_۱ - \hat{B}' = ۱/۲\overset{\frown}{A'B'} - ۱/۲\overset{\frown}{AB} = ۱/۲|\overset{\frown}{A'B'} - \overset{\frown}{AB}|$

مثال : دو وتر عمود بر هم از دایره‌ای کمانهای به اندازه‌های ۳۰ و ۸۰ جدا کرده‌اند اندازه‌های دو زاویه‌های دو زاویه‌ی درگیر چقدر است ؟



$M_۱ = ۱/۲(\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{A'B'})$

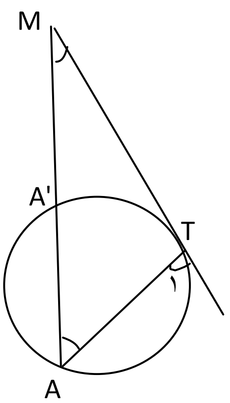
$۹۰ = ۱/۲(۳۰ + y)$ $\qquad$ $۱۸۰ = ۳۰ + y$

$Y = ۱۵۰$

$Y + x + ۸۰ + ۳۰ = ۳۶۰$ $\qquad$ $X = ۳۶۰ - ۱۵۰ - ۸۰ - ۳۰$ $\qquad$ $\boxed{x = ۱۰۰}$

تمرین :

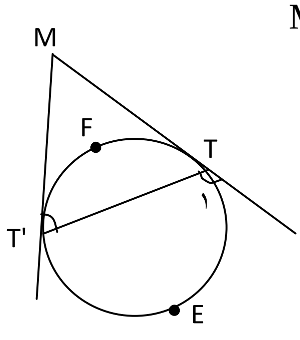
ثابت کنید : $A\hat{M}T = \frac{\overset{\frown}{AT} - \overset{\frown}{A'T}}{۲}$



برهان : از A به T وصل، زاویه‌ی $T_۱$ ایجاد می‌شود :

$\hat{T}_۱ = \hat{A} + \hat{M}$ $\qquad$ $\hat{M} = \hat{T}_۱ - \hat{A} = ۱/۲\overset{\frown}{AT} - ۱/۲\overset{\frown}{A'T}$

$\hat{M} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AT} - \overset{\frown}{A'T})$



تمرین : ثابت کنید : $T\hat{M}T' = \frac{1}{2}|\overset{\frown}{TET'} - \overset{\frown}{TFT'}|$

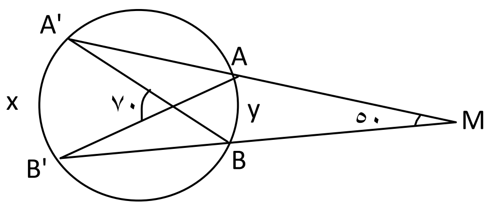
برهان :   از T به T' وصل می‌کنیم و زاویه‌ی $T_۱$ ایجاد می‌شود داریم :

$$\hat{T}_۱ = \hat{M} + \hat{T'} \qquad \hat{M} = \hat{T}_۱ - \hat{T'}$$

$$\hat{M} = \tfrac{1}{2}\,\overset{\frown}{TET'} - \tfrac{1}{2}\,\overset{\frown}{TFT'} = \tfrac{1}{2}\,\left|\,\overset{\frown}{TET'} - \overset{\frown}{TFT'}\,\right|$$

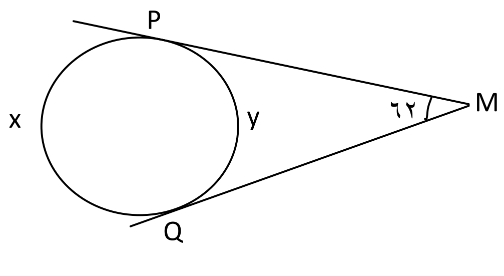
مثال : مطلوب است محاسبه‌ی x,y :

الف



$$\begin{cases} ۷۰ = \tfrac{1}{2}(x+y) \\ ۵۰ = ۱/۲(y-x) \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y = ۱۴۰ \\ -x+y = ۱۰۰ \end{cases} \qquad \begin{matrix} y = ۱۲۰ \\ x = ۲۰ \end{matrix}$$

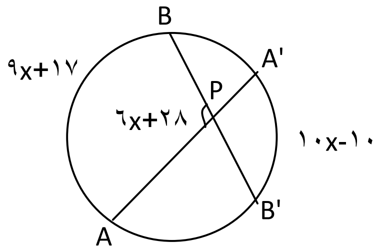
ب



$$\begin{cases} x+y = ۳۶۰ \\ \tfrac{1}{2}(x-y) = ۶۲ \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y = ۳۶۰ \\ x-y = ۱۲۴ \end{cases} \qquad \begin{matrix} x = ۲۴۲ \\ y = ۱۱۸ \end{matrix}$$

مثال : در هر یک از حالتهای زیر x را محاسبه کنید و زاویه‌ی P را .

الف

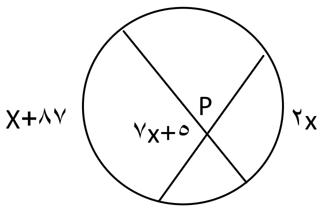


۶x+۲۸ = ½(۹x+۱۷+۱۰x−۱۰)

۱۲x+۵۶=۱۹x +۷ x=۷

P= ۶x+۲۸=۶x(۷)+۲۸=۴۲+۲۸=۷۰

ب



۷x+۵ = ½(x+۸۷+۲x)

۱۴x+۱۰=x+۸۷+۲x

X= ۷

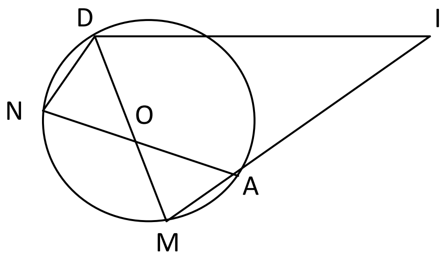
P= ۷x+۵=۷(۷)+۵ = ۴۹+۵ = ۵۴°

تمرین صفحه‌ی ۷٤ :

تمرین ۷ :

متوازی‌الاضلاع ***DIAN***

ثابت کنید : ***DM =DI***



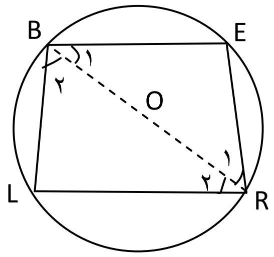
$$\begin{cases} M = \frac{1}{2}\,\widehat{DA} \\ N = 1/2\,\widehat{DA} \end{cases} \qquad \begin{cases} M = N \\ N = I \end{cases} \longrightarrow M = I \qquad DI = DM$$

متساوی‌الساقین DMI

تمرین ۸ :

$BL = ER$

ثابت کنید : $BE \parallel LR$

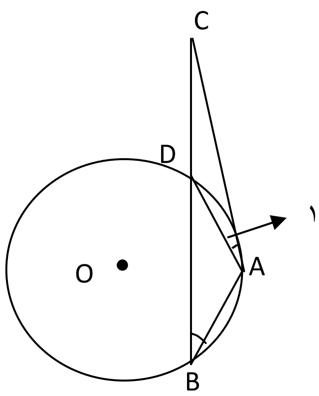


$$\left.\begin{array}{l} B_1 = \frac{1}{2}\,\widehat{ER} \\ R_2 = \frac{1}{2}\,\widehat{BL} \end{array}\right\} \Rightarrow B_1 = R_2 \xrightarrow[\text{خطوط موازی}]{\text{طبق عکس قضیه}} BL \parallel ER$$

تمرین ۹ :

$AC = AB$

ADC متساوی‌الساقین.



$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} A_1 = \frac{1}{2}\,\widehat{AD} \\ B = \frac{1}{2}\,\widehat{AD} \end{array}\right\} \longrightarrow A_1 = B \\ AC = AB \longrightarrow B = C \end{array}\right\} \longrightarrow A_1 = C$$

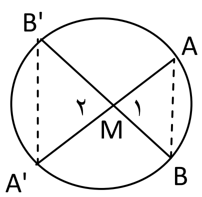
پس مثلث $\overset{\triangle}{ADC}$ متساوی الساقین است.

روابط طولی در دایره : (برای اثبات روابط طولی از تشابه استفاده می‌کنیم).

قضیه ۱ : اگر از نقطه‌ی M درون دایره‌ی c وترهای AA' و BB' را رسم کنیم آنگاه :

$$AM \,.\, MA' = BM \,.\, MB'$$

برهان : A را به B و A' را به B' وصل می‌کنیم برای مثلث‌های $MAB, MA'B'$ داریم :

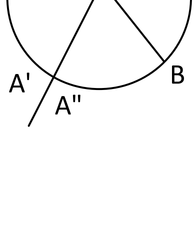


$$\left.\begin{array}{l} M_1 = M_2 \\ A' = B \end{array}\right\} \longrightarrow \overset{\triangle}{MAB} \sim \overset{\triangle}{MA'B'} \longrightarrow \frac{AM}{MB'} = \frac{MB}{MA'}$$

$$\left\{\begin{array}{l} A' = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB'} \\ B = \frac{1}{2}\overset{\frown}{B'A} \end{array}\right. \Longrightarrow MA \,.\, MA' = MB \,.\, MB'$$

عکس قضیه : اگر پاره‌خط‌های AA' و BB' طوری که در نقطه‌ی M متقاطع باشند که داشته باشیم

$MA \,.\, MA' = MB \,.\, MB'$ آنگاه نقاط A, A', B, B' روی یک دایره‌اند.



فرض: $MA \,.\, MA' = MB \,.\, MB'$

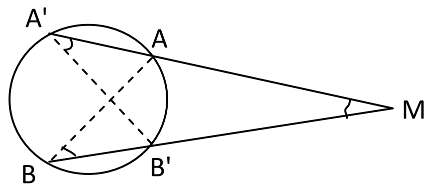
حکم : نقاط A, A', B, B روی یک دایره است.

برهان : دایره‌ی محیطی مثلث ABB' را رسم می‌کنیم،فرض می‌کنیم این دایره از نقطه‌ی A' نگذرد در این صورت این دایره پاره‌خط MA' را در نقطه‌ی A'' قطع می‌کند.

$$\left.\begin{aligned} MA \cdot MA'' &= MB \cdot MB' \\ MA \cdot MA' &= MB \cdot MB' \end{aligned}\right\} \quad MA \cdot MA'' = MA \cdot MA'$$

$$\boxed{MA'' = MA'} \longrightarrow$$ بر هم منطبق‌اند. A',A''

قضیه ۲ : اگر وترهای AA' و BB' در نقطه‌ی M واقع در خارج دایره‌ی c متقاطع باشند، ثابت کنید حاصلضرب در قطعه‌ی جدا شده از یکی برابر است با حاصلضرب دو قطعه‌ی جدا شده از دیگری :



فرض $AA' \cap BB' = \{ M \}$

حکم $MA \cdot MA' = MB \cdot MB'$

برهان : A را به B و A' را به B' وصل می‌کنیم برای مثلث‌های $MAB, MA'B'$ داریم :

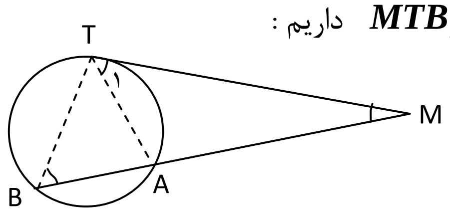
$$\left.\begin{aligned} \hat{M} &= \hat{M} \\ \hat{A'} &= \hat{B} = ۱/۲\overset{\frown}{AB'} \end{aligned}\right\} \quad \overset{\triangle}{MAB} \sim \overset{\triangle}{MA'B'} \longrightarrow \frac{MA}{MB'} = \frac{MB}{MA'}$$

$$\boxed{MA \cdot MA' = MB \cdot MB'}$$

قضیه : اگر از نقطه‌ای خارج از دایره یک مماس و یک قاطع نسبت به دایره‌ای رسم کنیم مماس بر دایره واسطه-ی هندسی است بین دو قطعه آن قاطع.

$MT^۲ = MA \cdot MB$ حکم

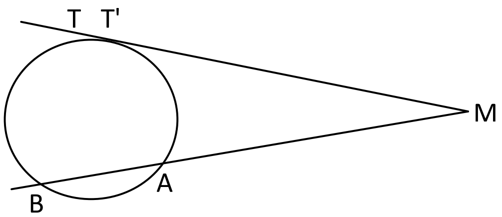
برهان : T را به A,B وصل کرده برای مثلث‌های MTA و MTB داریم :



$$\left.\begin{array}{l}\widehat{M} = \widehat{M} \\ \widehat{B} = \widehat{T}_1 = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AT}\end{array}\right\} \quad \overset{\triangle}{MTA} \sim \overset{\triangle}{MTB} \longrightarrow \frac{MT}{MB} = \frac{MA}{MT}$$

$$\boxed{MT^2 = MA \,.\, MB}$$

عکس قضیه : فرض می‌کنیم نقاط M,A,B بر یک خط راست واقع ، نقطه‌ی T خارج آن باشد و داریم $MT^2 = MA \,.\, MB$ ثابت کنید MT بر دایره‌ی محیطی مثلث TAB مماس است.

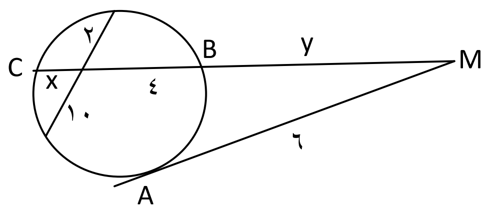


دایره‌ی محیطی مثلث TAB را رسم می‌کنیم سپس M را به T وصل می‌کنیم اگر MT بر دایره مماس نباشد در نقطه‌ای مانند T' آنرا قطع خواهد نمود .

$$\left.\begin{array}{l}MT' \,.\, MT = MA \,.\, MB \\ MT^2 = MA \,.\, MB\end{array}\right\} \quad MT' \,.\, MT = MT^2 \longrightarrow MT' = MT$$

$$\boxed{MT' = MT \longrightarrow T , T' \text{ بر هم منطبق‌اند}}$$

مثال : در شکل زیر ***x,y*** را محاسبه کنید :



$MA^۲ = MB \cdot MC$

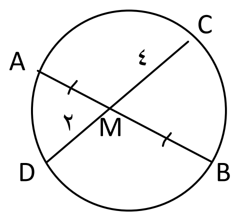
$۴ \times x = ۲ \times ۱۰$

$\boxed{X = ۵}$

$۶^۲ = y(y+۴+x)$ $۳۶ = y(y+۴+۵)$ $y(y+۹) = ۳۶$

$Y^۲ + ۹y - ۳۶ = ۰$ $(y-۳)(y+۱۲) = ۰$ $\{y=۳ \quad y=-۱۲$ غ ق ق$\}$

مثال : اگر ***M*** وسط ***AB*** و ۲ = ***CM*** و ۴ = ***DM*** باشد طول ***AB*** را محاسبه کنید :



$AB = ۲AM = ۲MB$

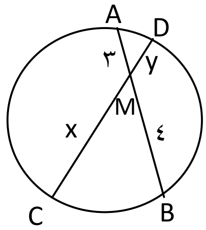
چون ***M*** وسط ***AB*** است : ***MA = MB***

MA . MB = MC . MD

$MA^۲ = ۲ \times ۴$

$\boxed{MA = ۲\sqrt{۲}}$

$AB = ۲MA = ۲ \times ۲\sqrt{۲} = ۴\sqrt{۲}$



مثال : اگر $MB = ۴$, $AM = ۳$, $CD = ۸$ باشد مقدار x,y را بیابید :

$CD = x + y$ $\quad$ $x+y = ۸ = S$

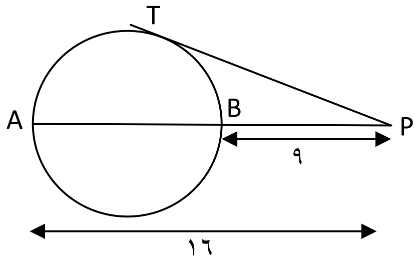
$CM . MD = AM . MB$ $\quad$ $xy = ۱۲ = P$

$X^۲ - ۸X + ۱۲ = ۰$ $\quad$ $(x-۶)(x-۲) = ۰$

$$\begin{cases} X=۶ & y=۲ \\ X=۲ & y=۶ \end{cases}$$

مثال : دایره‌ی C و نقطه‌ی p خارج آن مفروض‌اند اگر فاصله‌های دورترین و نزدیکترین نقاط دایره به نقطه‌ی P به ترتیب ۱۶و ۹ باشد، اندازه‌ی شعاع و طول مماس که از P بر آن رسم شده پیدا کنید :

نزدیکترین فاصله – دورترین فاصله = ۲R



$PB = ۹$

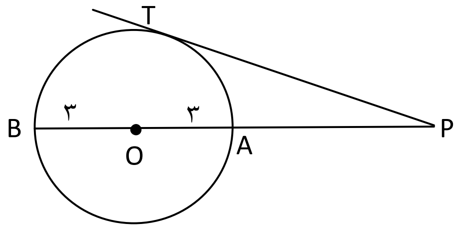
$PA = ۱۶$

$۲R = AB = PA - PB = ۱۶ - ۹ = ۷$

$۲R = AB \longrightarrow ۲R = ۷ \longrightarrow R = ۳/۵$

$PT^۲ = PB \times PA \longrightarrow PT^۲ = ۹ \times ۱۶$ $\quad$ $PT = ۱۲$

مثال : در شکل روبه‌رو شعاع دایره ۳ و طول مماس PT دو برابر PA است اندازه‌ی OP کدام است ؟



۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۷

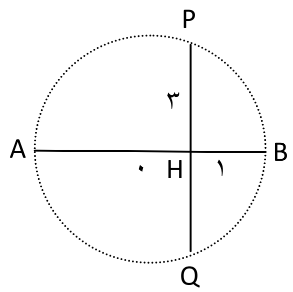
$PT^۲ = PA . PB$ $\qquad$ $PT = ۲PA$

$(۲PA)^۲ = PA .(PA+۶)$ $\qquad$ $AB = ۳+۳ = ۶$

$۴PA^۲ = PA^۲ + ۶PA \longrightarrow ۳PA^۲ - ۶PA = ۰ \rightarrow ۳PA(PA - ۲) = ۰$

$\begin{cases} PA = ۰ \\ PA = ۲ \checkmark \end{cases}$ $\qquad$ $OP = OA + PA = ۳+۲ = ۵$

مثال : اگر AB قطر دایره و $BH = ۱$ و $PH = ۳$ باشد ، شعاع دایره کدام است ؟



۱) ۳
۲) ۵
۳) ۸
٤) ۱۰

حل : می‌دانیم قطر عمود بر وتر آن را نصف می‌کند.

$PH = PQ = ۳$

$AH . HB = PH . HQ$ $\qquad$ $AH \times ۱ = ۳ \times ۳$

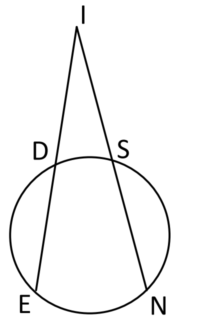
$AH = ۹$

$AB = AH + ۱ = ۹ + ۱ = ۱۰$

$AB = ۲R$

$۱۰ = ۲R$

$\boxed{R = ۵}$



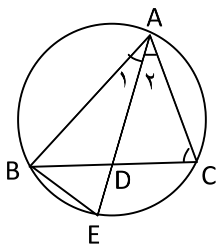
تمرین ۲ صفحه ۸۷ :

IN = IE

ثابت کنید ***IS = ID***

$ID \,.\, IE = IS \,.\, IN \qquad \boxed{ID = IS}$

تمرین ۳ صفحه ۸۷ :



الف) $\overset{\triangle}{ABE} \sim \overset{\triangle}{ADC}$

نیمساز : ***AD***

$$\left.\begin{array}{l} A_۱ = A_۲ \\ E = C = \overset{\frown}{AB}/۲ \end{array}\right\} \Longrightarrow \overset{\triangle}{ADC} \sim \overset{\triangle}{AEB}$$

ب) $AB \,.\, AC = AD \,.\, AE$

$$\overset{\triangle}{ADC} \sim \overset{\triangle}{AEB} \longrightarrow \frac{\mathbf{AD}}{\mathbf{AB}} = \frac{\mathbf{AC}}{\mathbf{AE}} \longrightarrow AD \,.\, AE = AB \,.\, AC$$

پ) $AD^{۲} = AB\ .\ AC - BD\ .\ DC$

$$AD\ .\ \underbrace{AE}_{(AD + DE)} = AB\ .\ AC$$

$(AD + DE)\ .\ AD = AB\ .\ AC$

$AD^{۲} + DE\ .\ AD = AB\ .\ AC$

$AD^{۲} = AB\ .\ AC - AD\ .DE$ ۱

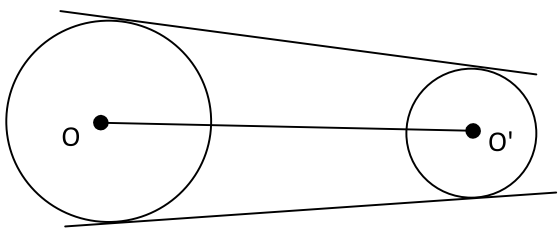
$AD\ .DE = BD\ .\ DC$ ۲

۱,۲ $AD^{۲} = AB\ .\ AC - BD\ .DC$

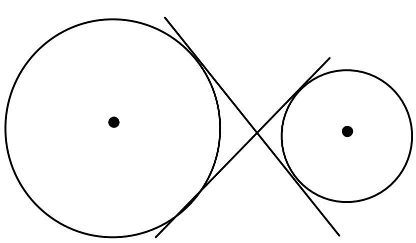
مماس مشترک دو دایره

خطی است که بر هر دو دایره مماس باشد.

۱) اگر دو دایره در یک طرف خط مماس باشند آن خط را مماس مشترک خارجی دو دایره می‌گویند.
۲) اگر دو دایره در طرفین خط مماس باشند آن خط را مماس مشترک داخلی دو دایره می‌گویند.



مماس مشترک خارجی دو دایره



مماس مشترک داخلی دو دایره

رسم مماس مشترک خارجی دو دایره:

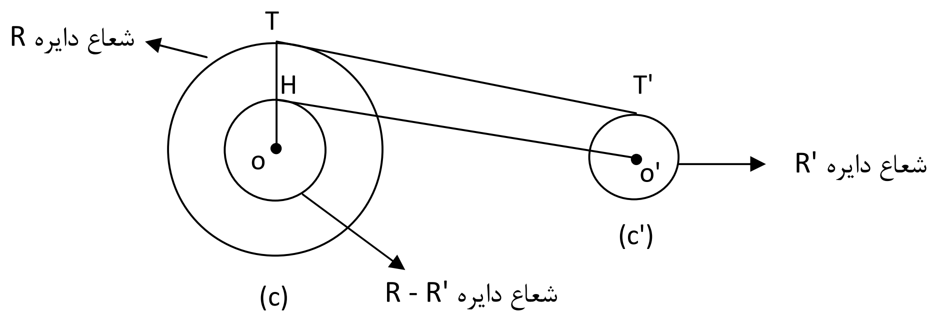
دو دایره $c(O , R)$ و $c'(O' , R')$ با فرض $R > R'$ در نظر می‌گیریم برای رسم مماس مشترک خارجی آنها ابتدا به مرکز O و شعاع $R - R'$ دایره‌ای رسم می‌کنیم از نقطه‌ی O' خطی مماس بر آن رسم می‌کنیم تا در نقطه‌ی H آن را قطع کند O را به H وصل کرده امتداد می‌دهیم تا دایره‌ی c را در نقطه‌ی T قطع کند. از T خطی موازی $O'H$ رسم می‌کنیم تا دایره‌ی c' را در نقطه‌ی T' قطع کند TT' جواب مسئله است.

نکته : طول مماس مشترک خارجی دو دایره از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید :

$$TT' = \sqrt{d^{۲} - (R - R')^{۲}}$$

d= فاصله‌ی بین 'OO

طول خطالمرکزین



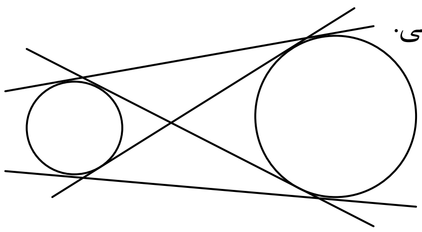
رسم مماس مشترک داخلی دو دایره :

دو دایره $c(O\ ,\ R)$ و $c'(O'\ ,\ R')$ با فرض $R > R'$ در نظر می‌گیریم برای رسم مماس مشترک داخلی آنها ابتدا به مرکز O و شعاع $R + R'$ دایره‌ای رسم می‌کنیم. سپس از نقطه‌ی O' مماس $O'H$ را به آن وارد می‌کنیم H را به O وصل می‌کنیم تا دایره‌ی c را در نقطه‌ی T قطع کند. از T خطی موازی $O'H$ رسم می‌کنیم تا دایره‌ی c' را در نقطه‌ی T' قطع کند TT' جواب مسئله است.

نکته : طول مماس مشترک داخلی دو دایره از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید : $TT' = \sqrt{d^۲ - (R + R')^۲}$

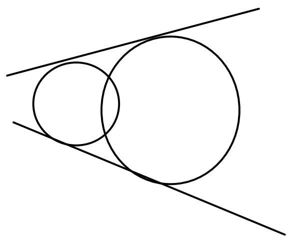
مثال ۱: دو دایره‌ی متخارج چند مماس مشترک دارند ؟

حل : دو مماس مشترک داخلی و دو مماس مشترک خارجی.



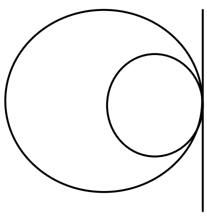
مثال ۲: دو دایره‌ی متقاطع چند مماس مشترک دارند ؟

حل : فقط دو مماس مشترک خارجی.



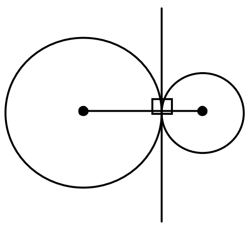
مثال ۳: دو دایره‌ی مماس داخلی چند مماس مشترک دارند ؟

حل : فقط یک مماس مشترک خارجی.



مثال ۴: مماس مشترک داخلی کدام دو دایره بر خط‌المرکزین آنها عمود است ؟

حل : مماس خارجی (دو دایره مماس خارجی).



مثال ۵ : شعاع دایره‌ی$\boldsymbol{O}$ برابر ۷ و شعاع دایره‌ی$\boldsymbol{O'}$ برابر ۱۹ می‌باشد. اگر طول خط‌المرکزین آنها ۱۲ باشد این دو دایره چند مماس مشترک دارند ؟

دو دایره مماس خارجی $d= R + R'$

دو دایره مماس داخلی $d = R - R'$

d=۱۲

R -R' = ۱۹ – ۷ = ۱۲

d=R-R' ۱مماس مشترک خارجی دارند و ۲ مماس مشترک داخلی

مثال ۶ : دو دایره به شعاع‌های ۳و۴ سانتی‌متر مفروض‌اند. اگر فاصله‌ی مراکز آنها ۸ سانتی‌متر باشد ،مطلوب است طول مماس‌های مشترک داخلی آنها.

حل :

$$\left.\begin{array}{l} d=۸ \\ R+R' = ۷ \end{array}\right\}$$

$$TT' = \sqrt{d^۲ - (R+R')^۲} = \sqrt{۸^۲ - ۷^۲} = \sqrt{۶۴ - ۴۹} = \sqrt{۱۵}$$

مثال ۷ : دو دایره به شعاع‌های ۲و۴ مماس خارجی‌اند طول مماس مشترک خارجی آنها را پیدا کنید :

D=R+R' = ۲+۴=۶

مثال ۸ : دو دایره به شعاع‌های ۶و $\boldsymbol{R}$ مفروض‌اند اگر طول خط‌المرکزین آنها ۱۳ و طول مماس مشترک خارجی آنها ۱۲ باشد $\boldsymbol{R}$ را پیدا کنید :

$۱۲^۲ = ۱۳^۲ - (R-۶)^۲$ $\qquad$ $۱۴۴ = ۱۶۹ - (R-۶)^۲$ $\qquad$ $(R-۶)^۲ = ۲۵$

$R - ۶ = \pm ۵$ $\qquad$ $\begin{cases} R-۶ = ۵ \\ R-۶ = -۵ \end{cases}$ $\qquad$ $\boxed{R = ۱۱ \qquad R = ۱}$

مثال : دو دایره‌ی مساوی به شعاع ۵ متخارج‌اند. اگر طول مماس مشترک داخلی آنها $۴\sqrt{۲}$ باشد اندازه‌ی خط‌المرکزین چقدر است ؟

$TT' = \sqrt{d^۲ - (R + R')^۲}$ $\qquad$ $۴\sqrt{۶} = \sqrt{d^۲ - (۵ + ۵)^۲}$

$(۴\sqrt{۲})^۲ = d^۲ - ۱۰^۲$ $\qquad$ $d^۲ = ۱۰۰+۹۶$ $\qquad$ $\boxed{d = ۱۴}$

تمرین : دو دایره به شعاع ۹ و ۴ مماس برون‌اند. اندازه مماس مشترک خارجی آنها را بیابید.

$R = ۹$ $\qquad$ مماسی برون $d=R+R' = ۹+۴ = ۱۳$

$R' = ۴$ $\qquad$ $TT' = \sqrt{d^۲ - (R - R')^۲} = \sqrt{۱۳^۲ - (۹ - ۴)^۲}$

$TT' = \sqrt{۱۶۹ - ۲۵} = \sqrt{۱۴۴} = ۱۲$

تمرین : مقدار a را چنان بیابید که اندازه مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع ۸ و ۳ و خط‌المرکزین ۱۳ برابر ۵a-۳ باشد.

$R = ۸$

$R' = ۳$ $\qquad$ $TT' = \sqrt{d^۲ - (R - R')^۲}$

d=۱۳ $\quad$ ۵a-۳=$\sqrt{۱۳^۲-(۸-۳)^۲}$

TT'= ۵a-۳ $\quad$ ۵a-۳=$\sqrt{۱۶۹-۲۵}=\sqrt{۱۴۴}$

۵a-۳= ۱۲ $\quad$ ۵a=۱۵ $\quad$ $\boxed{a=۳}$

نکته : مماس مشترک خارجی و طول خطالمرکزین ناهمرسند.

نکته: مماس مشترک داخلی و طول خطالمرکزین همرسند.

تمرین : طول خطالمرکزین دو دایره متقاطع به شعاع ۳ و ۴ و برابر ۶ سانتی‌متر است. طول مماس مشترک خارجی را بیابید.

R = ۴

R' = ۳ $\quad$ $TT'=\sqrt{d^۲-(R-R')^۲}$

d=۶ $\quad$ $TT'=\sqrt{۶^۲-(۴-۳)^۲}=\sqrt{۳۶-۱}=\sqrt{۳۵}$

تمرین : مقدار a را چنان بیابید که اندازه‌ی مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع‌های ۸ و ۲ و خط-المرکزین۱۰= d برابر ۱-۳a باشد. سپس تعیین کنید این دو دایره چند مماس مشترک داخلی دارند.

R=۸

R' = ۲ $\quad$ $TT'=\sqrt{d^۲-(R-R')^۲}$

d=۱۰ $\quad$ ۳a-۱=$\sqrt{۱۰^۲-(۸-۲)^۲}=\sqrt{۱۰۰-۳۶}=\sqrt{۶۴}=۸$

TT' = ۳a-۱ $\quad$ ۳a-۱= ۸ $\quad$ $\boxed{a=۳}$

R+R' = ۸+۲= ۱۰ = d

d = R+R' $\longrightarrow$ مماس برون‌اند

یک مماس مشترک داخلی

تمرین : دو دایره به شعاع ۲و۷ سانتی‌متر و خط‌المرکزین برابر ۱+۲x مفروض‌اند اگر اندازه‌ی مماس مشترک خارجی آنها ۲x باشد مقدار x را بیابید :

$R = ۷$

$R' = ۲$ $\qquad TT' = \sqrt{d^۲ - (R - R')^۲}$

$d = ۲x + ۱$ $\qquad ۲x = \sqrt{(۲x + ۱)^۲ - (۷ - ۲)^۲}$

$TT' = ۲x$ $\qquad ۲x = \sqrt{۴x^۲ + ۴x + ۱ - ۲۵}$

$$۴x^۲ = ۴x^۲ + ۴x + ۱ - ۲۵ \qquad \boxed{x = ۶}$$

تمرین : دو دایره به شعاع ۴ و ۹ سانتی‌متر مماس برون‌اند مقدار x را طوری بیابید که اندازه‌ی مماس مشترک خارجی آنها برابر ۲-۲x باشد.

$R = ۹$ $\qquad$ مماس برون $\quad d = R + R' = ۹ + ۴ = ۱۳$

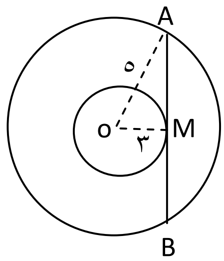
$R' = ۴$ $\qquad TT' = \sqrt{d^۲ - (R - R')^۲}$

$TT' = ۲x - ۲$ $\qquad (۲x - ۲)^۲ = \sqrt{۱۳^۲ - (۹ - ۴)^۲}$

$$(۲x - ۲)^۲ = \sqrt{۱۶۹ - ۲۵} = \sqrt{۱۴۴} = ۱۲$$

$$X = ۷$$

تمرین : شعاع دو دایره هم مرکز ۵و۳ سانتی‌متر است اندازه‌ی وتری از دایره بزرگتر را که بر دایره کوچکتر مماس است بیابید :

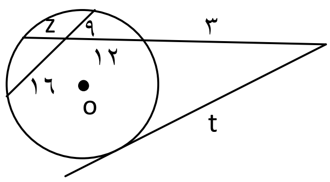


$AM^{۲} + ۳^{۲} = ۵^{۲}$ $\boxed{AM = ۴}$

$AB = ۲AM = ۲ \times ۴ = \boxed{۸}$

تمرین : در شکل زیر t و Z را بیابید :

الف)

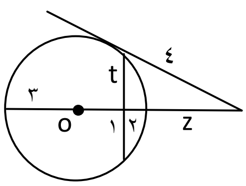


$t^{۲} = ۳(۳ + ۱۲ + Z)$

$۱۲Z = ۹ \times ۱۶$ $\boxed{Z = ۱۲}$

$t^{۲} = ۳(۳ + ۱۲ + ۱۲) = ۳ \times ۲۷ = ۸۱$ $\boxed{t = ۹}$

ب)



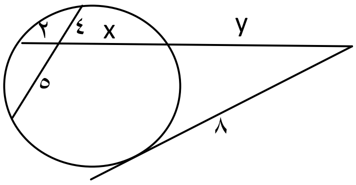
$۴^{۲} = z(Z + ۳ + ۳)$ می‌دانیم قطر عمود بر وتر آنرا نصف می‌کند

$۱۶ = Z(Z + ۶)$ $Z^{۲} + ۶Z - ۱۶ = ۰$ $(Z - ۲)(Z + ۸) = ۰$

$$\begin{cases} Z = 2 & \text{ق ق} \\ Z = -8 & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$t \times t = 2 \times 4$ $\quad t^2 = 8$ $\quad \boxed{t = 2\sqrt{2}}$

تمرین : با توجه به شکل مقادیر x,y را بیابید :



الف)

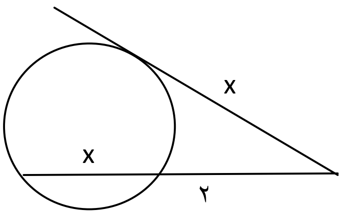
$8^2 = y\,(y+x+2)$

$2 \times x = 4 \times 5$ $\quad 2x = 20$ $\quad x = 10$

$8^2 = y(y+10+2)$ $\quad 64 = y^2 + 12y$

$Y^2 + 12y - 64 = 0$ $\quad (y+16)(y-4) = 0$ $\quad \begin{cases} y = 4 & \text{ق ق} \\ Y = -16 & \text{غ ق ق} \end{cases}$

ب)



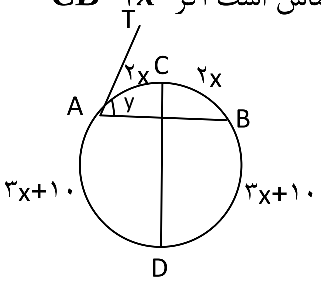
$X^2 = 2(2+x)$

$X^2 - 2X - 4 = 0$ $\quad \Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(-4) = 4 + 16 = 20$

$$\begin{cases} 1+\sqrt{5} & \text{ق ق} \\ 1-\sqrt{5} & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

تمرین : در شکل مقابل قطر CD بر وتر AB عمود است و AT بر دایره مماس است اگر $\overset{\frown}{CB}=۲x$

$\overset{\frown}{AD} = ۳x+۱۰$ و $T\hat{A}B = y°$ آنگاه x,y را بیابید :



$Y = ۱/۲(۲x + ۲x)$

$Y = ۲x$

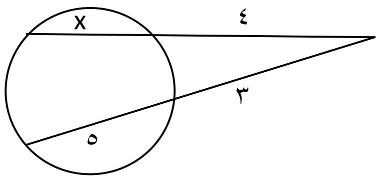
$۲x + ۲x + ۳x + ۱۰ + ۳x + ۱۰ = ۳۶۰$

$۱۰x + ۲۰ = ۳۶۰$

$$\boxed{\begin{array}{l} x = ۳۴ \\ Y = ۲ \times ۳۴ = ۶۸ \end{array}}$$

تمرین : مقدار x را بیابید :

الف)

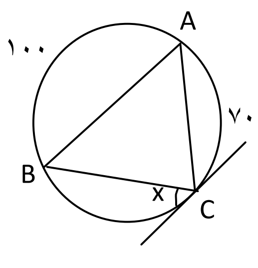


$۴(۴+x) = ۳(۳+۵)$

$۱۶ + ۴x = ۲۴$

$\boxed{X = ۲}$

ب)

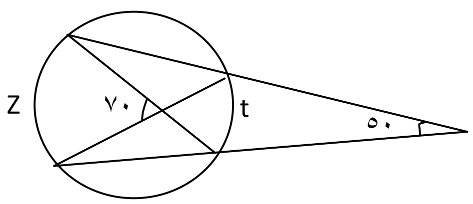


$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{AC} = ۳۶۰$ $\qquad$ $۱۰۰ + \overset{\frown}{BC} + ۷۰ = ۳۶۰$

$\overset{\frown}{BC} = ۳۶۰ - ۱۰۰ - ۷۰$ $\qquad$ $\overset{\frown}{BC} = ۱۹۰$

$X = \frac{1}{2} \overset{\frown}{BC} = \frac{1}{2} \times ۱۹۰$ $\qquad$ $x = ۹۵$

تمرین : در شکل زیر مقدار z , t را بیابید :

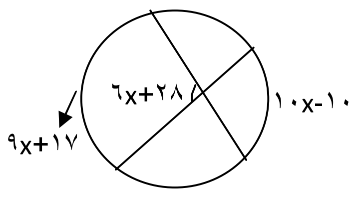


$$\begin{cases} ۷۰ = \frac{1}{2}(Z+t) \\ ۵۰ = \frac{1}{2}(Z-t) \end{cases} \qquad \begin{cases} ۱۴۰ = Z + t \\ ۱۰۰ = Z - t \end{cases}$$

$$۲۴۰ = ۲Z$$

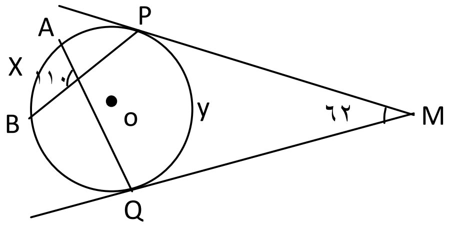
$$\boxed{Z = ۱۲۰}$$

$$\boxed{t = ۲۰}$$



$۶x + ۲۸ = \frac{1}{2}(۹x + ۱۷ + ۱۰x - ۱۰)$

$۱۲x + ۵۶ = ۱۹x + ۷$ $\qquad$ $۷x = ۴۹$ $\qquad$ $\boxed{x = ۷}$



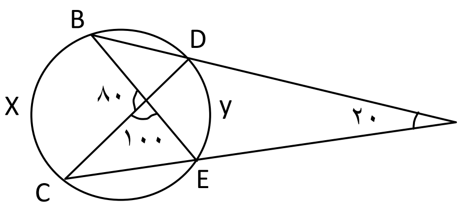
$۶۲ = ½ (y – x)$ $\qquad$ $۱۲۴ = y - x$

$۱۱۰ = ½ (y + x)$ $\qquad$ $۲۲۰ = y + x$

$۳۶۴ = ۲y$

$\boxed{Y = ۱۸۲}$

$\boxed{X = ۳۸}$



تمرین : مقدارهای ***x,y*** را بیابید :

$$\begin{cases} ۲۰ = ½ (x – y) \\ ۸۰ = ½ (x + y) \end{cases} \qquad \begin{cases} ۴۰ = x – y \\ ۱۶۰ = x + y \end{cases} \qquad \begin{matrix} x = ۱۰۰ \\ y = ۶۰ \end{matrix}$$

$۲۰۰ = ۲x$