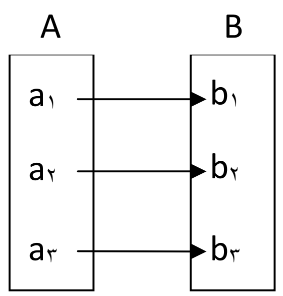
نگاشت

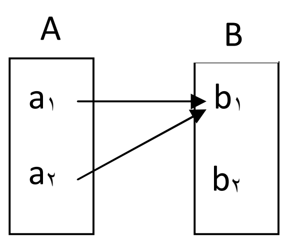
نگاشت از A درB تناظر بین این دو مجموعه است به طوری که هر عضو مجموعه A فقط و فقط با یک عضو مجموعه B متناظر شده باشد.

توجه : طبق این تعریف هر عضو B ممکن است با بیش از یک عضو A متناظر باشد.

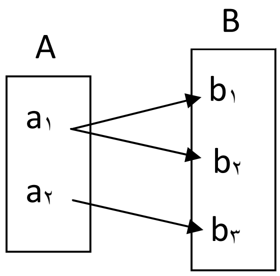
۱) اگر هر عضو مجموعه A بر یک عضو مجموعه B تصویر شده باشد و هر عضو مجموعه B فقط تصویر یک عضو از مجموعه A باشد نگاشت را یک به یک می‌گویند.



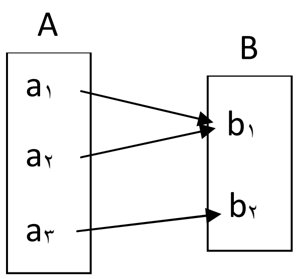
۲) اگر عضوی در مجموعه‌ی B باشد که تصویر هیچ عضو از مجموعه A نباشد می‌گوییم نگاشت پوشا نیست. مانند b_2



۳) اگر عضوی در مجموعه A باشد که بر بیش از یک عضو از مجموعه B تصویر شده باشد نگاشت وجود ندارد.



۴) اگر عنصری در مجموعه B باشد که تصویر بیش از یک عنصر مجموعه‌ی A باشد نگاشت یک به یک نخواهد بود.



تعریف تبدیل :

نگاشتی یک به یک از صفحه به روی خودش است. در تبدیل هر نقطه در صفحه تصویر یک نقطه از آن صفحه بوده و هیچ دو نقطه دارای یک تصویر نمی‌باشد.

انواع تبدیل

انتقال – بازتاب – دوران – تجانس

تعریف ایزومتری :

تبدیلی است که در آن فاصله‌ی بین نقاط ثابت می‌ماند .

نکته : هرگاه شکل توسط یک ایزومتری نگاشت شود تصویر شکل با شکل اصلی همنهشت است .

مثال : اگر $T(x , y) = (x+۱ , ۳y)$ آنگاه

الف) تصویر نقطه‌ی (۵ , ۲) را تحت تبدیل فوق بیابید.

ب) معلوم کنید نقطه‌ی (۹ , ۴) تصویر چه نقطه‌ای است .

الف) $T (۲ , ۵) = (۲+۱ , ۳×۵) = (۳ , ۱۵)$

ب) $T(x , y) = (۴ , ۹)$ $\qquad (x+۱ , ۳y) = (۴ , ۹)$

$x+۱ = ۴ \qquad \boxed{x=۳}$

$۳y = ۹ \qquad \boxed{y=۳}$

نقطه (۳,۳)

مثال : نقطه های $A(۱ , ۴)$ و $B(-۲ , -۱)$ مفروض‌اند اگر $T(A) = A'$ و $T(B) = B'$ و $T(x , y) = (۲x , y-۱)$ باشند فاصله‌ی $A'B'$ کدام است ؟

۱) $\sqrt{٦١}$
۲) $\sqrt{٥١}$
۳) $\sqrt{١٥}$
۴) $\sqrt{١٦}$

$A' = T(۱ , ۴) = (۲ , ۳)$

$B' = T(-۲ , -۱) = (-۴ , -۲)$ $\qquad A'B' = \sqrt{(۲+۴)^۲ + (۳+۲)^۲} = \sqrt{۶۱}$

مثال : اگر $P(۵ , -۳)$ و $Q(۳ , -۱)$ و $R(۵ , -۱)$ رئوس یک مثلث باشند و داشته باشیم $R(x , y) = (-y , x)$ در این صورت $P'+Q'+R'$ کدام است ؟

۱) $(۱ , ۱۱)$
۲) $(٥ , ۱۳)$
۳) $(۲ , ۱۱)$
۴) $(۲ , ۱۳)$

$P'=R(٥ , -۲) = (۳ , ٥)$

$Q'=R(۳ , -۱) = (۱ , ۳)$

$R' = R(٥ , -۱) = (۱, ٥)$

$P' + O' + R' = (۳+۱+۱ , ٥+۳+٥) = (٥, ۱۳)$

مثال : نگاشت با ضابطه‌ی $R(x , y) = (x^{۲} - ۱ , y+۲)$ را در نظر بگیرید :

الف) تصویر نقاط $(۴ , ۱-)$ و $(۰ , ۰)$ را تحت این نگاشت بدست آورید .

ب) نقطه‌ی $(۵ , ۳)$ تصویر چه نقطه‌ای است .

ج) آیا نگاشت فوق تبدیل است ؟چرا ؟

الف)

$$R(-۱ , ۴) = ((-۱)^{۲} - ۱ , ۴+۲) = (۰ , ۶)$$

$$R(۰ , ۰) = (۰^{۲} -۱ , ۰+۲) = (-۱ , ۲)$$

ب)

$$R(x , y) = (x^{۲}-۱ , y+۲) = (۳ , ۵)$$

$$x^{۲}-۱ = ۳ \qquad x= \pm ۲$$

$$y+۲ = ۵ \qquad y= ۳$$

$$R(۲ , ۳) = (۳ , ۵) \qquad R(-۲ , ۳) = (۳ , ۵)$$

ج) نگاشت فوق تبدیل نیست ، زیرا نقطه‌ی $(۵ , ۳)$ تصویر دو نقطه از صفحه می‌باشد.

مثال : کدام نگاشت یک تبدیل است ؟

۱) $T(x , y) = (x^{۲} , y^{۲})$

۲) $T(x , y) = (x^{۳} , y^{۳})$ ✓

۳) $T(x , y) = (x , x)$

٤) $T(x , y) = (x^{۴} , y^{۴})$

مثال : اگر $T(x , y) = (x+۱ , -۳y)$ یک تبدیل باشد، آنگاه نقطه‌ی$(۹ , ۴)$ تصویر چه نقطه‌ای است.

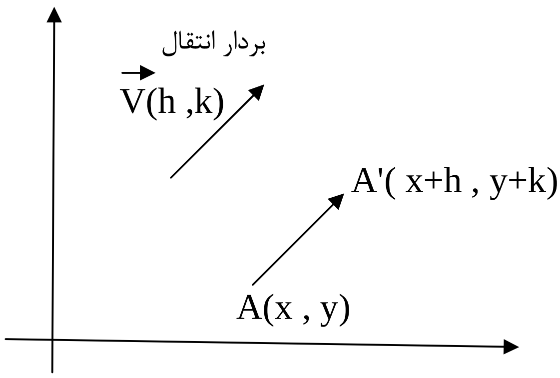
$T(x , y) = (۴ , ۹)$ $\qquad$ $(x+۱ , -۳y) = (۴ , ۹)$

$x+۱ = ۴$ $\qquad$ $x=۳$

نقطه : $(۳ , ۳)$

$-۳y= ۹$ $\qquad$ $y= -۳$

انتقال :



تعریف : نگاشتی یک به یک از صفحه به روی خودش است (تبدیلی است)

که هر نقطه مانند A در صفحه را در امتداد، هم جهت و به اندازه‌ی بردار $\vec{V}$ جابه‌جا می‌کند.

ضابطه‌ی انتقال :

$$\mathbf{T(x , y) = (x+h , y+k)}$$

مثال : نگاشت انتقال $T(x , y) = (x-۲ , y+۱)$ و نقاط $A(۱ , -۲)$ و $B(-۱ , ۲)$ را در نظر بگیرید :

الف) تصویر نقطه‌های A و B را تحت انتقال فوق بدست آورید و 'A و 'B بنامید.

$A' = T(۱ , -۲) = (-۱ , -۱)$ $\qquad\qquad$ $B'=T(-۱ , ۲) = (-۳ , ۳)$

ب) مختصات بردارهایی که A را به 'A و B را به 'B وصل می‌کند را بدست آورید و طول بردارهای $\overrightarrow{AA'}$ و $\overrightarrow{BB'}$ را محاسبه کنید :

$$AA' = \begin{bmatrix} x'_A - x_A \\ y'_A - y_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ - ۱ \\ -۱ + ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

$$BB' = \begin{bmatrix} x'_B - x_B \\ y'_B - y_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۳ + ۱ \\ ۳ - ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

$$AA' = \sqrt{(-۱ - ۱)^۲ + (-۱ + ۲)^۲} = \sqrt{۴ + ۱} = \sqrt{۵}$$

$$BB' = \sqrt{(-۳ + ۱)^۲ + (۳ - ۲)^۲} = \sqrt{۴ + ۱} = \sqrt{۵}$$

ج) طول پاره خط های AB و 'A'B را بدست آورید و با هم مقایسه کنید :

$$AB = \sqrt{(۱ + ۱)^۲ + (-۲ - ۲)^۲} = \sqrt{۴ + ۱۶} = \sqrt{۲۰} = ۲\sqrt{۵}$$

$$A'B' = \sqrt{(-۳ + ۱)^۲ + (۳ + ۱)^۲} = \sqrt{۲۰} = ۲\sqrt{۵}$$

$AB = A'B'$ $\qquad$ تبدیل ایزومتری است

مثال : نقطه‌ی $A(۲ , -۳)$ را هم‌سنگ بردار $\overrightarrow{V}(۳ , ۱)$ انتقال می‌دهیم ضابطه‌ی انتقال و مختصات تصویر A را تحت این انتقال پیدا کنید :

$T(x , y) = (x+۳ , y+۱)$

$A' = T(۲ , -۳) = (۵ , -۲)$

ویژگی‌های انتقال :

۱) انتقال ایزومتری است.

۲) انتقال شیب را حفظ می‌کند.

۳) بردارهایی که هر نقطه را به نقطه‌ی تصویرش نظیر می‌سازد طول‌های مساوی و جهت یکسان دارند.

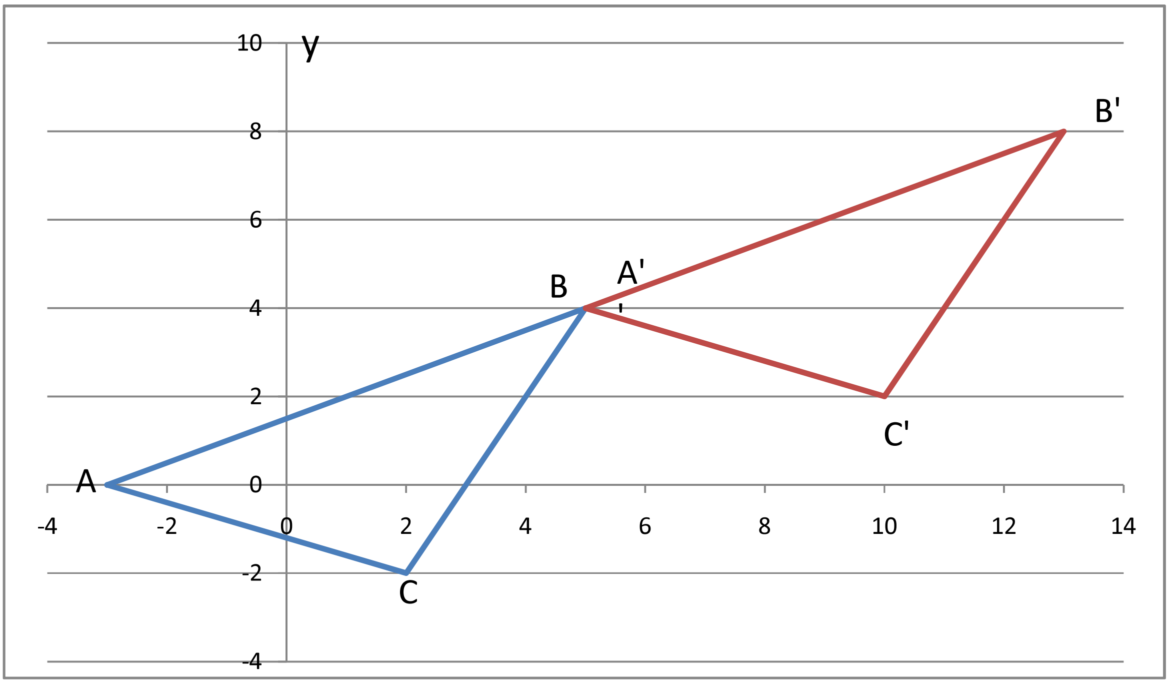
مثال : A(-۳ , ۰) و B(۵ , ۴) و C(-۲ , ۲) سه راس یک مثلث اند.مثلث و تصویرش را تحت انتقال که A را به روی B تصویر می‌کند رسم نموده و ضابطه‌ی انتقال را بنویسید.

A' = T(-۳ , ۰) = (۵ , ۴)

$\boxed{\text{T(x , y) = (x+۸ , y+۴)}}$ ضابطه‌ی انتقال

B'=T(۵ , ۴) = (۱۳ , ۸)

C'=T(۲ , -۲) = (۱۰ , ۲)



نکته : اگر بخواهیم معادله‌ی تصویر یک خط را تحت یک انتقال بدست آوریم کافی است تصویر دو نقطه از خط را یافته، معادله‌ی خط گذرنده از این دو نقطه را بنویسیم.

مثال : نمودار تصویر خط ۲x-۳y=۶ را در انتقال با ضابطه‌ی T(x , y) = (x+۱ , y-۱) رسم نموده و معادله‌ی آن را بنویسید.

T(x , y) = (x+۲ , y-۱)

۲x – ۳y =۶

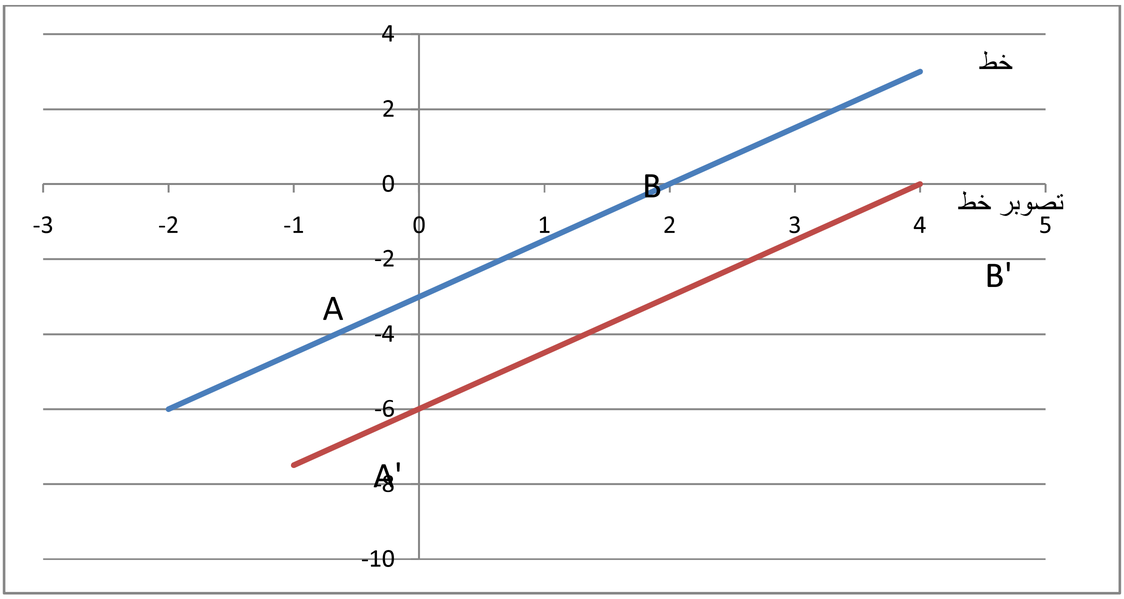
X=۰ y=-۲ A(۰ , -۲) $\longrightarrow$ A'(۲ , -۳)

Y=۰ x=۳ B(۳ , ۰) $\longrightarrow$ B'(۵ , -۱)

$$m=\frac{y_{B'}-y_{A'}}{x_{B'}-x_{A'}}=\frac{-۱+۳}{۵-۲}=\frac{۲}{۳}$$

Y+۱ = ۲/۳(x-۵) ۳y+۳=۲x-۱۰

۲x-۲y=۱۲



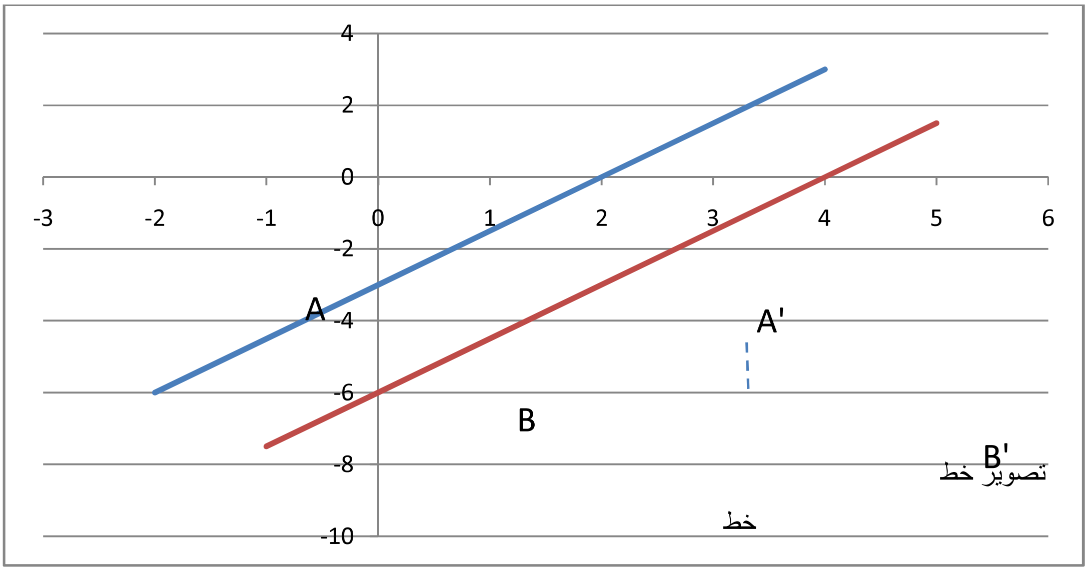
مثال : خط ۲x+y-۴=۰ و تصویرش را تحت انتقال T(x , y) = (x+۴ , y-۲) رسم کنید سپس معادله‌ی خط تصویر را بدست آورید:

X=۰ y=۴ A(۰ , ۴) ⟶ A'(۴ , ۲)

Y=۰ x=۲ B(۲ , ۰) ⟶ B'(۶ , -۲)

$$m = \frac{y_{B'} - y_{A'}}{x_{B'} - x_{A'}} = \frac{-۲ - ۲}{۶ - ۴} = \frac{-۴}{۲} = -۲$$

$y-y_0 = m(x-x_0)$ y-۲= -۲(x-٤) y-۲ = -۲x+۸ $\boxed{y= -۲x+۱۰}$



تذکر : تحت سه انتقال تصویر هر خط با خود آن خط موازی است.

مثال :خط ۲x-۳y=۶ را هم‌سنگ بردار (۴ , ۲) انتقال داده‌ایم معادله‌ی تصویر خط را بدست آورید :

T(x , y) = (x+۲ , y+۴)

X=۰ y=-۲ A(۰ , -۲) ⟶ A'(۲ , ۲)

Y=۰ x=۳ B(۳ , ۰) ⟶ B'(۵ , ۴)

$$m = \frac{۴ - ۲}{۵ - ۲} = \frac{۲}{۳}$$

y-۲ = ۲/۳ (x-۲) ۳y-۶=۲x-۴ ۳y=۲x+۲

در انتقال خط و تصویرش با هم موازی اند.

مثال : در یک صفحه‌ی مختصات دو خط $L_۱$ و$L_۲$ را رسم کنید :

$L_۱$: $۳x-۲y-۶=۰$ $L_۲$: $۳x-۲y-۱۲=۰$

ضابطه‌ی سه انتقال متفاوت که تحت آنها $L_۲$ تصویر $L_۱$ باشد را بدست آورید :

$L_۱$: $\begin{cases} x=۰ & y=-۳ \\ y=۰ & x=۲ \end{cases}$ $A(۰ , -۳)$ $B(۲ , ۰)$

$L_۲$: $\begin{cases} x=۰ & y=-۶ \\ y=۰ & x=۴ \end{cases}$ $C(۰ , -۶)$ $D(۴ , ۰)$

فرض می‌کنیم $A(۰ , -۳)$ نقطه‌ای از خط $L_۱$ باشد. در این صورت $A'(۰+h , -۳+k)$ روی خط $L_۲$ خواهد بود.بنابراین مختصات A' در معادله‌ی $L_۲$ صدق می‌کند.

$۳(۰+h) -۲(-۳+k) = ۱$

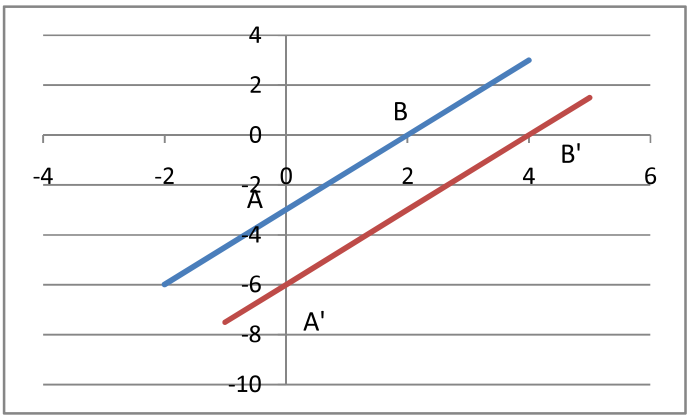
$۳h+۶-۲k = ۱۲$

$۳h – ۲k = ۶$

$h=۰$ $k=-۳$ $T_۱(x , y)= (x , y-۳)$

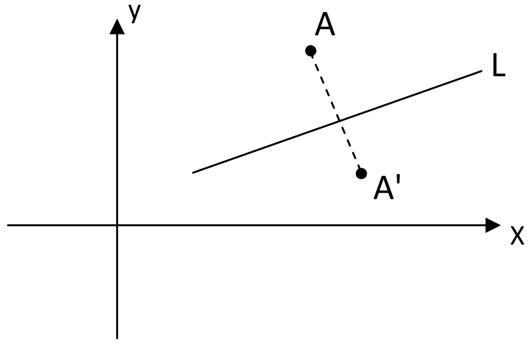
$k=۰$ $h=۲$ $T_۲(x , y) = (x+۲ , y)$

$k=۳$ $h=۴$ $T_۳(x , y) = (x+۴ , y+۳)$



بازتاب :

بازتاب تبدیلی است که تحت آن تصویر نقطه‌ی A نسبت به L نقطه‌ای است مانند A' به طوری که خط L عمود منصف AA' باشد.



خط L را محور تقارن می‌گویند.

در صورتی که نقطه روی خط باشد تصویر آن بر خودش منطبق است.

ضابطه‌های بازتاب :

۱) بازتاب نسبت به محور x ها یا خط $y=0$:

$$D(x , y) = (x , -y)$$

۲) بازتاب نسبت به محور y یا $x=0$:

$$D(x , y) = (-x , y)$$

۳) بازتاب نسبت به نیمساز ربع اول و سوم یا خط $y=x$:

$$D(x , y) = (y , x)$$

۴) بازتاب نسبت به نیمساز ربع دوم و چهارم یا خط $y=-x$:

$$D(x , y) = (-y , -x)$$

۵) بازتاب نسبت به خط $x=\alpha$:

$$D(x , y) = (۲\alpha-x , y)$$

۶) بازتاب نسبت به خط $y=\beta$:

$$D(x , y) = (x , ۲\beta-y)$$

مثال : طول پاره‌خط $A'B'$ که A' تصویر $A(۳ , ۰)$ بر محور xها و B' تصویر $B(۳ , ۴)$ نسبت به نیمساز ربع اول و سوم باشد چقدر است ؟

$A' = (۳ , ۰)$ $\qquad\qquad$ $B' = (۴ , ۳)$

$$A'B' = \sqrt{(۳-۴)^۲ + (۰-۳)^۲} = \sqrt{۱+۹} = \sqrt{۱۰}$$

مثال : بازتاب نقطه‌ی $A(۳ , -۲)$ نسبت به خط $y=۳x-۲y$ کدام است ؟

۱) $A'(۳ , -۲)$

۲) $A'(-۲ , ۳)$

۳) $A'(۱/۲ , ۱/۲)$

۴) $A'(۲ , -۳)$

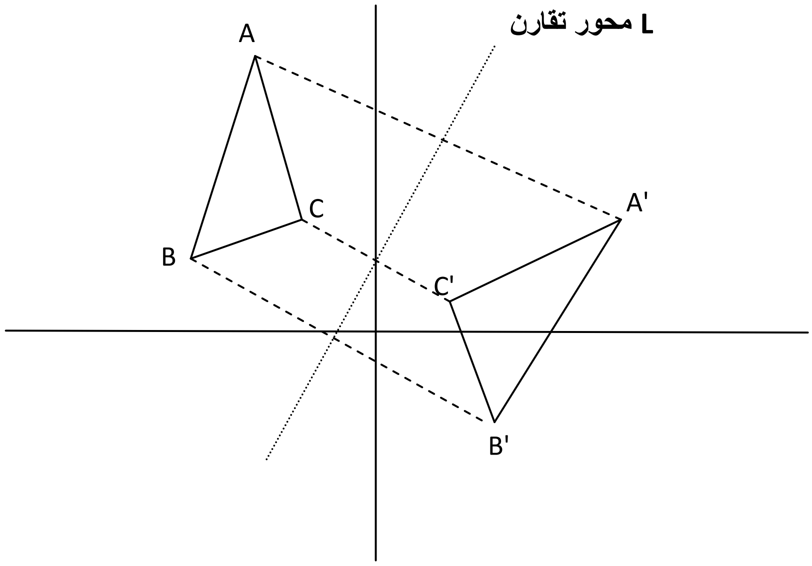
$Y=۳x-۲y \qquad y+۲y=۳x \qquad ۳y=۳x \qquad y=x$

$A(۳ , -۲) \longrightarrow A'(-۲ , ۳)$

مثال : $A(-۳ , ۸)$, $B(-۵ , ۲)$, $C(-۱ , ۴)$ سه راس مثلثی هستند. اگر تحت یک بازتاب راس A روی نقطه‌ی $A'(۷ , ۴)$ تصویر نمود :

الف) محور تقارن را رسم کرده و تصویر مثلث ABC را تحت همان بازتاب در صفحه‌ی مختصات مشخص کنید .

ب) معادله‌ی محور تقارن را بنویسید.



وسط AA' : $M(۱ , ٦)$

$$x_m = \frac{x_A + x_{A'}}{۲} = \frac{-۳ + ۷}{۲} = ۲$$

$$y_m = \frac{y_A + y_{A'}}{۲} = \frac{۸ + ۴}{۲} = ۶$$

$$m_{AA'} = \frac{y_{A'} - y_A}{x_{A'} - x_A} = \frac{۴ - ۸}{۷ + ۳} = -\frac{۴}{۱۰} = -\frac{۲}{۵}$$

$$m_L = -\frac{۱}{m_{AA'}} = \frac{۵}{۲} \qquad M(۲ , ۶)$$

$$y - y_o = m_L (x - x_o) \qquad y - ۶ = ۵/۲(x-۲)$$

$$۲y - ۱۲ = ۵x - ۱۰ \qquad \boxed{۵x - ۲y = -۲}$$

مثال : تحت یک بازتاب نقطه‌ی (۱- , ۳-) روی نقطه‌ی (۷ , ۳) تصویر شده است، معادله‌ی محور تقارن را بنویسید.

$$x_m = \frac{-۳ + ۳}{۲} = ۰$$

$$y_m = \frac{-۱ + ۷}{۲} = ۳ \qquad M(۰\ ,۳)$$

$$m' = \frac{-۱ - ۷}{-۳ - ۳} = \frac{-۸}{-۶} = \frac{۴}{۳} \qquad m = -\frac{۱}{m'} = -\frac{۳}{۴}$$

$$y - ۳ = -\frac{۳}{۴}(x - ۰) \qquad ۴y - ۱۲ = -۳x \qquad ۳x + ۴y = ۱۲$$

مثال : $A(۲ , ۱۰)$, $B(۴ , -۲)$, $C(-۳ , ۱)$ سه راس مثلثی هستند :

الف) مثلث و تصویر آن را تحت بازتاب با ضابطه‌ی $R(x , y) = (-x , y)$ رسم کنید :

ب) مثلث و تصویر آن را از نظر شیب و طول اضلاع بررسی کنید :

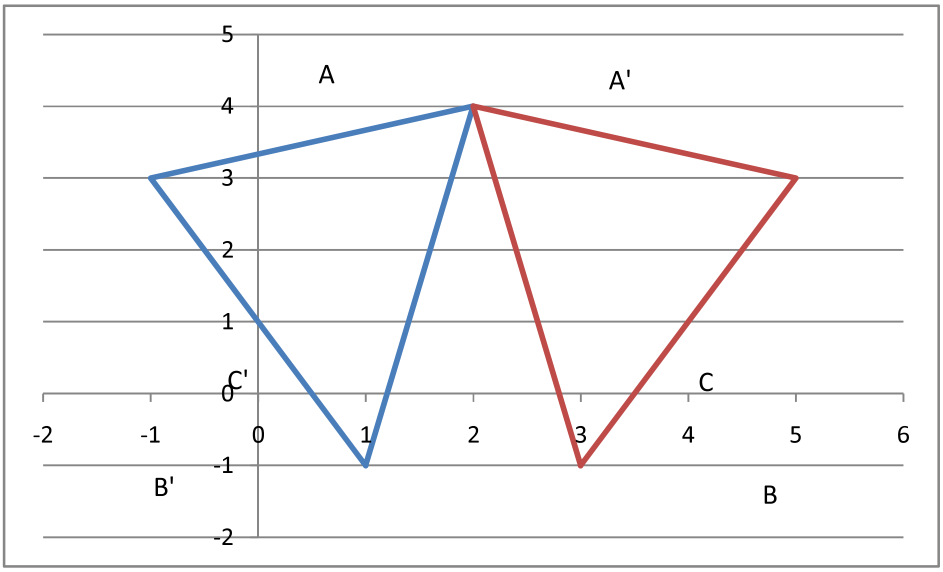
ج) مختصات تصویر مثلث را تحت بازتاب نسبت به خط $x-۲ = ۰$ مشخص کنید :

د) مختصات و تصویر مثلث را تحت بازتاب نسبت به خط $y+۱ = ۰$ مشخص کنید :

$A' = R(۲ , ۱۰) = (-۲ , ۱۰)$

$B' = R(۴ , -۲) = (-۴ , -۲)$

$C' = R(-۳ , ۱) = (۳ , ۱)$



ب)

$AB = \sqrt{(۴-۲)^۲ + (-۲-۱۰)^۲} = \sqrt{۴+۱۴۴} = \sqrt{۱۴۸}$

$A'B' = \sqrt{(-۴+۲)^۲ + (-۲-۱۰)^۲} = \sqrt{۴+۱۴۴} = \sqrt{۱۴۸}$

AB = A'B' بازتاب ایزومتری است.

$m_{AB} = \frac{۱۰+۲}{۲-۴} = -۶$

$m_{A'B'} = \frac{۱۰+۲}{-۲+۴} = ۶$

$m_{AB} \neq m_{A'B'}$ شیب را حفظ نمی‌کند

ج)

x-۲ = ۰ x=۲

R(x , y) = (۲α-x , y) = (۴-x , y)

A'' = R(۲ , ۱۰) = (۲ , ۱۰)

B'' = R(۴ , -۲) = (۰ , -۲)

C'' = R(-۳ , ۱) = (۷ , ۱)

د)

Y+۱=۰ y=-۱

R(x , y) = (x , ۲β-y) = (x , -۲-y)

$A''_۱$ = R(۲ , ۱۰) = (۲ , -۱۲)

$B''_۱$ = R(۴ ,-۲) = (۴ , ۰)

$C''_۱$ = R(-۳ , ۱) = (-۳ , -۳)

ویژگی های بازتاب :

۱) بازتاب ایزومتری است.
۲) بازتاب شیب را الزاما حفظ نمی‌کند.
۳) بازتاب جهت شکل را ثابت نگه نمی‌دارد.

مثال : $A(۱ , -۱)$, $B(۲ , ۴)$, $C(-۱ , ۳)$ سه راس یک مثلث اند :

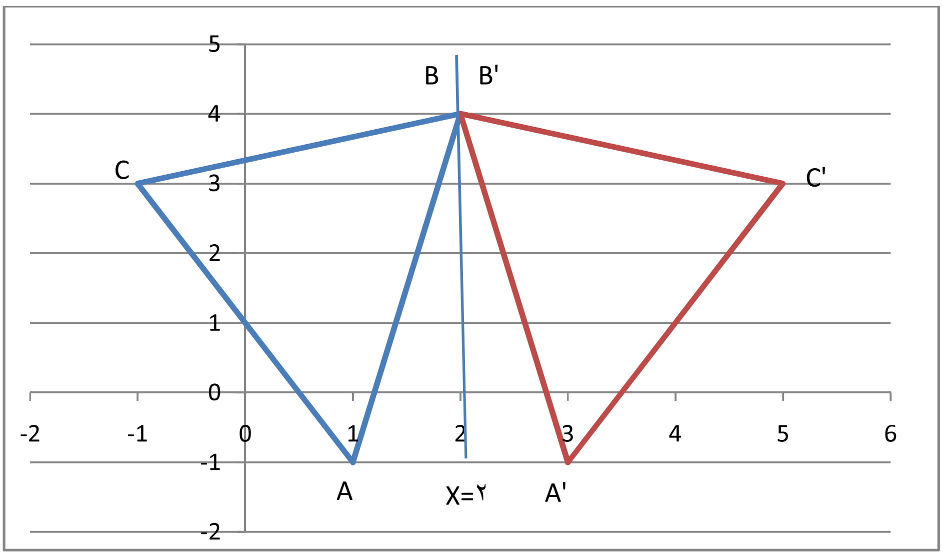
الف) مثلث و تصویرش را تحت تبدیل $f(x , y) = (-x+۴ , y)$ رسم کنید :

ب) تبدیل f را توصیف کنید :

$A' = f(۱ , -۱) = (۳ , -۱)$

$B' = f(۲ , ۴) = (۲ , ۴)$

$C' = f(-۱ , ۳) = (۵ , ۳)$



AA' وسط M(۲ , -۱)

BB' وسط N(۲ , ۴) x=۲ محور تقارن

CC' وسط E(۲ , ۳)

در این حالت طول N , M و E برابر اند پس :

مثال : A(۱ , -۱) , B(۲ , ۴) , C(-۱ , ۳) راس های یک مثلث اند ،مثلث و تصویرش را تحت تبدیل R(x , y) = (x , -y+۶) رسم کرده و تبدیل R را توصیف کنید.

A' = R(۱ , -۱) = (۱, ۷)

B' = R(۲ , ۴) = (۲ , ۲)

C' = R(-۱ , ۳) = (-۱ , ۳)

در این حالت عرض M, N , E برابر اند.

AA' وسط M(۱ , ۳)

BB' وسط N(۲ , ۳)

CC' وسط E(-۱ , ۳)

معادله‌ی خطی که وسطهای هر نقطه را به نقطه‌ی تصویرش وصل می‌کند به صورت خط y=۳ بوده بنابراین می‌توان گفت تبدیل R یک بازتاب است نسبت به خط y=۳ .

مثال : $A(۲ , ۳)$, $B(۴ , -۱)$, $C(۷ , ۴)$ سه راس یک مثلث اند،مثلث و تصویرش را تحت تبدیل $T(x , y) = (-y-۱ , -x-۱)$ رسم کرده و تبدیل T را توصیف کنید :

$A' = T(۲ , ۳) = (-۴ , -۳)$

$B' = T(۴ , -۱) = (۰ , -۵)$

$C' = T(۷ , ۴) = (-۵ , -۸)$

AA' وسط $M(-۱ , ۰)$

BB' وسط $N(۲ , -۳)$

CC' وسط $E(۱ , -۲)$

ابتدا معادله خط MN را می‌نویسیم :

$$m_{MN} = \frac{-۳ - ۰}{۲ + ۱} = -۱$$

$$y - y_o = m(x - x_o) \qquad y - ۰ = -۱(x + ۱) \qquad y = -x - ۱$$

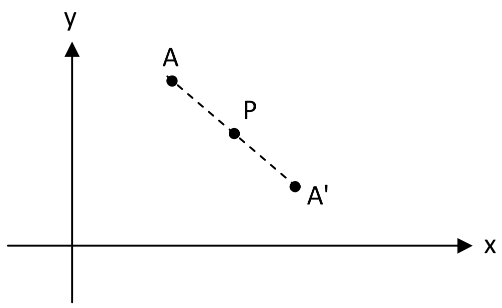
مختصات نقطه‌ی E را در معادله قرار می‌دهیم :

$E(۱ , -۲)$ $\quad -۲ = -۱ -۱ \quad -۲ = -۲$

می‌توان گفت تبدیل فوق یک بازتاب است نسبت به خط $y = -x -۱$.

بازتاب مرکزی :

بازتاب نسبت به نقطه‌ی P تبدیلی است که تحت آن تصویر هر نقطه مانند A در صفحه نقطه‌ای است مانند A' به طوری که نقاط A , P , A' بر یک استقامت بوده و $PA = PA'$ باشد.



ضابطه‌ی بازتاب مرکزی :

۱) بازتاب نسبت به مبدا مختصات

$$D(x , y) = (-x , -y)$$

۲) بازتاب نسبت به نقطه‌ی $W(\alpha , \beta)$

$$D (x , y) = (۲\alpha-x , ۲\beta-y)$$

نکته: برای نوشتن معادله‌ی نصویر یک خط تحت یک بازتاب به صورت زیر عمل می‌کنیم :

۱) مختصات دو نقطه از خط را پیدا می‌کنیم.
۲) تصویر این نقاط را پیدا می‌کنیم.
۳) معادله‌ی گذرنده از این دو نقطه را می‌نویسیم.

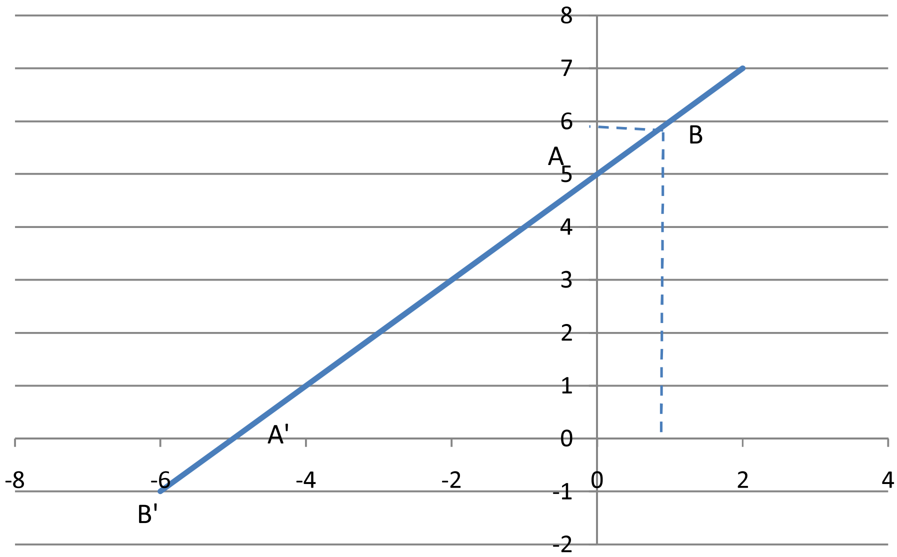
مثال : معادله‌ی تصویر خط y = x+۵ را تحت بازتاب نسبت به خط y = -x بدست آورده سپس آنها را رسم کنید :

X = ۰ ⟶ y = ۰　　　A(۰ , ۵) ⟶ A'(-۵ , ۰)

X = ۱ ⟶ y = ۶　　　B(۱ , ۶) ⟶ B'(-۶ , -۱)

R(x , y) = (-y , -x)

$$m_{A'B'} = \frac{۰ + ۱}{-۵ + ۶} = ۱ \qquad y - ۰ = ۱(x + ۵) \qquad y = x + ۵$$



مثال : معادله‌ی تصویر خط $y-2x-3=0$ تحت تبدیل $T(x , y) = (-x+3 , y)$ بدست آورید.

$X = 0 \longrightarrow y = 3$ $\qquad\qquad A(0 , 3) \longrightarrow A'(3 , 3)$

$X = 1 \longrightarrow y = 5$ $\qquad\qquad B(1 , 5) \longrightarrow B'(2 , 5)$

$$m_{A'B'} = \frac{5-3}{2-3} = \frac{2}{-1} = -2$$

$$y-3 = -2(x-3) \qquad y = -2x+9 \qquad y+2x-9 = 0$$

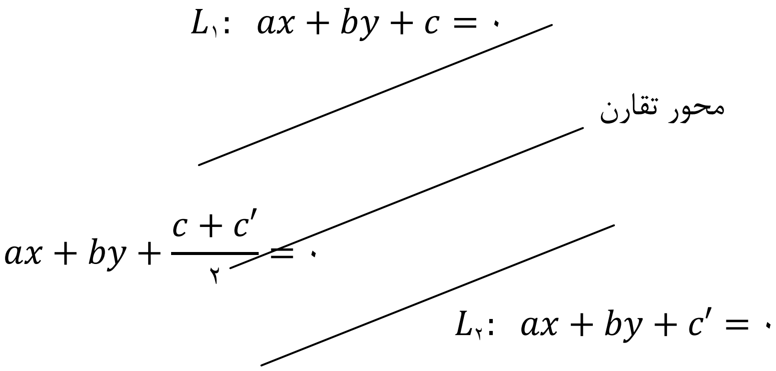
مثال : تحت یک بازتاب خط $x+y-3=0$ برخط $x+y+3=0$ تصویر شده است معادله‌ی محور تقارن را پیدا کنید.

$L_1 : \; x+y-3 = 0$

$L_2 : \; x+y+3 = 0$

$$x+y+\frac{-3+3}{2} = 0 \qquad x+y = 0 \qquad x = -y$$

نکته : برای دو خط موازی محور تقارن خطی است که موازی با آنها و به فاصله‌ی یکسان از آن دو خط واقع شده باشد .

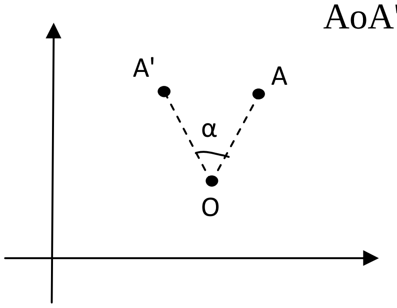


دوران :

دوران به مرکز o و زاویه‌ی α تبدیلی است که نقطه‌ی A در صفحه را به نقطه‌ای مانند 'A از آن صفحه طوری نظیر می‌کند به طوری که :

۱) مرکز دوران ثابت می‌ماند.

۲) اگر A نقطه‌ای غیر از o باشد آنگاه $OA = OA'$ و زاویه $\widehat{AoA'} = \alpha$



ضابطه‌ی دوران :

۱) دوران به مرکز مختصات مبدا و زاویه $\alpha = ۹۰$ یا $\alpha = -۲۷۰$.

$D(x , y) = (-y , x)$

۲) دوران به مرکز مختصات مبدا و زاویه‌ی $\alpha = ۲۷۰$ یا $\alpha = -۹۰$.

$D(x , y) = (y , -x)$

۳) دوران به مرکز o و زاویه‌ی $\alpha = \pm۱۸۰$

$D(x , y) = (-x , -y)$

۴) دوران به مرکز مختصات مبدا و زاویه $\alpha =۰$ یا $\alpha = ۳۶۰$.

$D(x , y) = (x , y)$

مثال : دوران $R(x , y) = (-y , x)$ را در نظر بگیرید :

۱) تصویر نقطه‌های (۱ , ۵) , (۳ , ۰) , (-۱ , ۷) را تحت این دوران بیابید.

۲) نقطه‌هایی را بیابید که تحت این دوران تصویرشان (۲ , ۶) , (۰ , ۳) باشد.

A(۱ , ۵) ⟶ A'(-۵ , ۱)

B(۳ , ۰) ⟶ B'(۰ , ۳)

C(-۱ , ۷) ⟶ C'(-۷ , -۱)

R(x , y) = (۲ , ۶) (-y , x) = (۲ , ۶) $\begin{cases} X = ۶ \\ Y = -۲ \end{cases}$ (۶ , -۲)

R(x , y) = (۰ , ۳) (-y , x) = (۰ , ۳) $\begin{cases} X = ۳ \\ Y = ۰ \end{cases}$ (۳ , ۰)

مثال : معادله‌ی تصویر خط ۲x+y = ۱ را تحت دوران θ = ۹۰ به دست آورید .

R(x , y) = (-y , x)

X=۰ ⟶ y=۱ A(۰ , ۱) ⟶ A'(-۱ , ۰)

Y=۳ ⟶ x=-۱ B(-۱ , ۳) ⟶ B'(-۳ , -۱)

$$m_{A'B'} = \frac{-۱ - ۰}{-۳ + ۱} = \frac{۱}{۲}$$

$$y - y_o = m(x - x_o) \qquad y - ۰ = \frac{۱}{۲}(x + ۱) \qquad ۲y - x = ۱$$

مثال : معادله‌ی تصویر خط y = x+۵ تحت دوران α = ۲۷۰ حول مبدا مختصات به دست آورید.

R(x , y) = (y , -x)

X= ۰ ⟶ y = ۵ A(۰ , ۵) ⟶ A'(۵ , ۰)

X=۱ ⟶ y=۶ B(۱ , ۶) ⟶ B'(۶ , -۱)

$$m_{A'B'} = \frac{-۱ - ۰}{۶ - ۵} = -۱$$

$$y - ۰ = -۱(x - ۵) \qquad y = -x + ۵$$

مثال : اگر (۱- , ۱)A , (۵- , ۲)B , (۵- , ۵)C , (۳- , ۶)D رئوس یک چهار ضلعی باشند تصویر آن را تحت تبدیل T(x , y) = (x+۹ , -y) رسم کنید و بگویید :

الف) چرا تبدیل یک دوران نیست ؟

ب) چرا تبدیل یک بازتاب نیست ؟

الف)

A' = T(۱ , -۱) = (۱۰ , ۱) M(۱۱/۲ , ۰) وسط AA'

B' = T(۲ , -۵) = (۱۱ , ۵) N(۱۳/۲ , ۰) وسط BB'

C' = T(۵ , -۵) = (۱۴ , ۵) E(۱۹/۲ , ۰) وسط CC'

D' = T(۶ , -۳) = (۱۵ , ۳) F(۲۱/۲ , ۰) وسط DD'

$$\left.\begin{array}{l} OA = \sqrt{{x_A}^۲ + {y_A}^۲} = \sqrt{۱^۲ + (-۱)^۲} = \sqrt{۲} \\ OA' = \sqrt{{x_{A'}}^۲ + {y_{A'}}^۲} = \sqrt{۱۰^۲ + ۱^۲} = \sqrt{۱۰۱} \end{array}\right\}$$

$OA \neq OA'$ دوران نیست .

ب) تبدیل فوق یک بازتاب است نسبت به خط $y = ۰$.

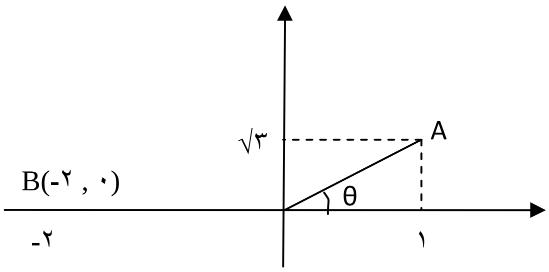
مثال : نقطه‌ی $A(۱ , \sqrt{۳})$ تحت چه دورانی حول مبدا به نقطه‌ی $B(-۲ , ۰)$ تصویر می‌شود ؟

۱) ۱۲۰

۲) ۱۵۰

۳) ۶۰

۴) ۲۱۰



$$\tan\theta = \frac{\sqrt{۳}}{۱} = \sqrt{۳}$$

$\theta = ۶۰$　　　$\alpha = ۱۲۰$

ویژگی‌های دوران :

۱) مرکز دوران ثابت می‌ماند.

۲) دوران ایزومتری است.

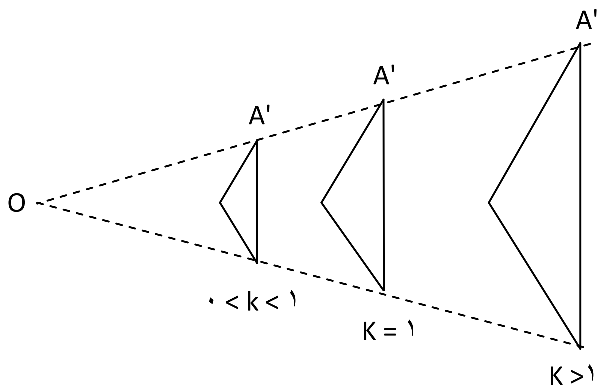
۳) دوران شیب را حفظ نمی‌کند.

تجانس :

تجانس به مرکز o و نسبت K تبدیلی است که هر نقطه مانند A در صفحه را به نقطه‌ای مانند A' از آن صفحه طوری نظیر می‌کند که :

الف) مرکز تجانس ثابت می‌ماند.

ب) نقطه‌ی A در امتداد OA طوری قرار گیرد که : $OA' = K \cdot OA$



حالت‌های خاص :

۱) در حالتی که $K > 0$ باشد شکل و تصویرش در یک طرف o بوده و تجانس را مستقیم گویند.
۲) در حالتی که $K < 0$ باشد شکل و تصویرش در طرفین o بوده و تجانس را غیر مستقیم گویند.
۳) در حالتی که $K = 0$ باشد مجانس شکل بر خودش منطبق بوده و در حالتی که $K = -1$ باشد مجانس شکل قرینه‌ی آن خواهد بود.

ضابطه‌ی تجانس :

تبدیل با ضابطه‌ی $D(x , y) = (kx , ky)$ را ضابطه‌ی یک تجانس می‌گویند .

۱) اگر $K > 1$ باشد ، تصویر شکل از خودش بزرگتر بوده می‌گویند تجانس انبساط دارد.

۲) اگر $0 < K < 1$ باشد ، تصویر شکل از خود شکل کوچکتر بوده تجانس انقباض دارد .

۳) اگر $K = 0$ باشد مجانس نقطه بر مرکز تجانس واقع خواهد بود.

مثال : $A(۱ , ۵)$, $B(۲ , ۲)$, $C(۴ , ۲)$ سه راس یک مثلثاند :

الف) مثلث و تصویر آن را نسبت به مرکز O با نسبت تجانس ۲ رسم کنید:

ب) از نظر شیب آنها را مقایسه کنید.

ج) از نظر طول اضلاع و نیز مساحت ، آنها را مقایسه کنید.

د) نسبت OA' / OA را به دست آورده با K مقایسه کنید.

و) این تجانس انبساط دارد یا انقباض؟چرا ؟

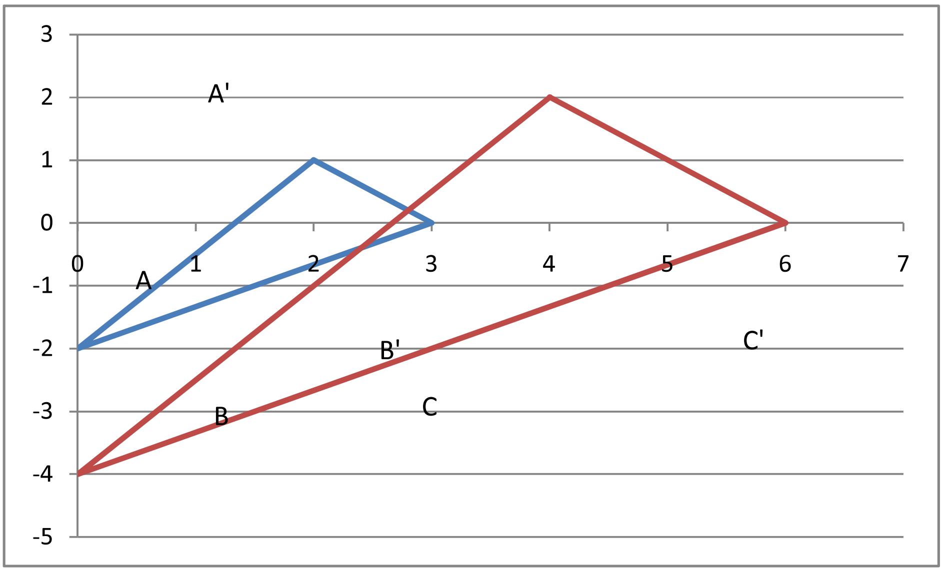
الف)

$D(x , y) = (۲x , ۲y)$

$A' = D(۱ , ۵) = (۲ , ۱۰)$

$B' = D(۲ , ۲) = (۴ , ۴)$

$C' = D(۴ , ۲) = (۸ , ۴)$



ب)

$$m_{AC}=\frac{۵-۲}{۱-۴}=\frac{۳}{-۳}=-۱$$

$$m_{A'C'}=\frac{۱۰-۲}{۲-۸}=\frac{۶}{-۶}=-۱$$

شیب حفظ می‌شود. $m_{AC}=m_{A'C'}$

ج)

$$AC=\sqrt{(۴-۱)^{۲}+(۲-۵)^{۲}}=\sqrt{۹+۹}=\sqrt{۱۸}=۳\sqrt{۲}$$

$$A'C'=\sqrt{(۸-۲)^{۲}+(۴-۱۰)^{۲}}=\sqrt{۳۶+۳۶}=۶\sqrt{۲}$$

$$\frac{A'C'}{AC}=\frac{۶\sqrt{۲}}{۳\sqrt{۲}}=۲=K$$

$$S=\frac{۱}{۲}BC.AH=\frac{۱}{۲}\times ۲\times ۳=۳$$

$$S'=\frac{۱}{۲}B'C'.A'H'=\frac{۱}{۲}\times ۴\times ۶=۱۲$$

$$\frac{S'}{S}=\frac{۱۲}{۳}=۴=K^{۲}$$

د)

$$OA=\sqrt{{x_A}^{۲}+{y_A}^{۲}}=\sqrt{۱^{۲}+۵^{۲}}=\sqrt{۲۶}$$

$$OA'=\sqrt{{x_{A'}}^{۲}+{y_{A'}}^{۲}}=\sqrt{۲^{۲}+۱۰^{۲}}=\sqrt{۱۰۴}=۲\sqrt{۲۶}$$

و)

تجانس انبساط دارد زیرا $K=۲$ بوده و تصویر از خود شکل بزرگتر است.

$$\frac{OA'}{OA}=\frac{۲\sqrt{۲۶}}{\sqrt{۲۶}}=۲$$

ویژگی‌های تجانس:

۱) مرکز تجانس ثابت می‌ماند.

۲) تجانس شیب را حفظ می‌کند.

۳) طول پاره‌خط و اندازه‌ی مساحت حفظ نمی‌شود مگر در حالتی که $K = ۱$ باشد.

۴) تجانس طول را با ضریب k و مساحت را با ضریب $K^۲$ تغییر می‌دهد.

۵) خط‌هایی که نقاط متناظر را به هم وصل می‌کنند در مرکز o هم‌رسند.

مثال : ضابطه‌ی حاصل از تبدیلات متوالی زیر را بنویسید.

۱) تجانس با نسبت ۳ به مرکز مبدامختصات.

۲) دوران حول مبدا با زاویه‌ی ۲۷۰.

۳) بازتاب حول نیم‌ساز ربع اول و سوم.

۴) انتقال با بردار (۲ , ۳-).

$$(x , y) \xrightarrow{\text{تجانس با } K = ۳} (۳x , ۳y) \xrightarrow{\text{دوران با ۲۷۰}} (۳y , -۳x)$$

$$(۳y , -۳x) \xrightarrow{\text{بازتاب بر خط } y = x} (-۳x , ۳y) \xrightarrow{\text{انتقال با } (۲ , ۳-)} (-۳x-۳ , ۳y+۲)$$

نکته : تجانس و انتقال شیب را حفظ می‌کند.

دوران و بازتاب شیب را حفظ نمی‌کند.

مثال : تجانس خط $۲x - ۳y = ۳$ را نسبت به مبدا مختصات با نسبت ۵ به دست آورید.

D(x , y) = (۵x , ۵y)

Y= ۰ ⟶ x=۲ A(۲ , ۰) ⟶ A'(۱۰ , ۰)

Y= ۲ ⟶ x=۵ B(۵ , ۰) ⟶ B'(۲۵ , ۱۰)

$$m_{A'B'} = \frac{۱۰ - ۰}{۲۵ - ۱۰} = \frac{۱۰}{۱۵} = \frac{۲}{۳} \qquad y - ۰ = \frac{۲}{۳}(x - ۱۰)$$

$$۳y - ۲x = -۲۰$$

مثال : در یک صفحه مختصات دو خط $L_۱ : ۳x - ۲y = ۶$ و $L_۲ : ۳x - ۲y = ۱۲$ را رسم کنید. سپس ضابطه‌ی یک تجانس را بنویسید که $L_۲$ تصویر $L_۱$ باشد.

$$L_۱ \begin{cases} x = ۰ \quad y = -۳ \quad A(۰ , -۳) \\ y = ۰ \quad x = ۲ \quad B(۲ , ۰) \end{cases}$$

$$L_۲ \begin{cases} x = ۰ \quad y = -۶ \quad C(۰ , -۶) \\ y = ۰ \quad x = ۴ \quad D(۴ , ۰) \end{cases}$$

$$OA = \sqrt{۰^۲ + (-۳)^۲} = \sqrt{۹} = ۳$$

$$OC = \sqrt{۰^۲ + (-۶)^۲} = \sqrt{۳۶} = ۶$$

اگر C را تصویر A فرض کنید آنگاه می‌توان تجانس به مرکز o و نسبت $K = ۲$ در نظر گرفت.

$$\frac{OC}{OA} = \frac{۶}{۳} = ۲$$

D(x , y) = (۲x , ۲y)

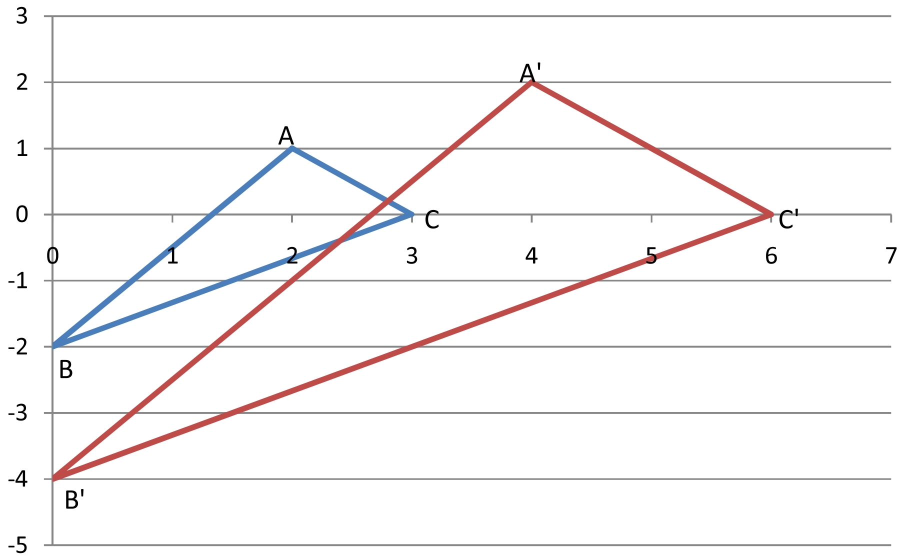
مثال : نقاط A(۲ , ۱) , B(۰ , -۲) , C(۳ , ۰) راس های یک مثلث هستند:

الف) مثلث و تصویرش را تحت تبدیل D(x , y) = (۲x , ۲y) رسم کنید.

ب) مثلث و تصویرش را از نظر طول و شیب با هم مقایسه کنید.

الف)

A'(۴ , ۲)   B'(۰ , -۴)   C'(۶ , ۰)



ب) $AB = \sqrt{(۲-۰)^۲ + (۱+۲)^۲} = \sqrt{۱۳}$

$A'B' = \sqrt{(۴-۰)^۲ + (۲+۴)^۲} = \sqrt{۵۲} = ۲\sqrt{۱۳}$

$\frac{A'B'}{AB} = \frac{۲\sqrt{۱۳}}{\sqrt{۱۳}} = ۲ = K$

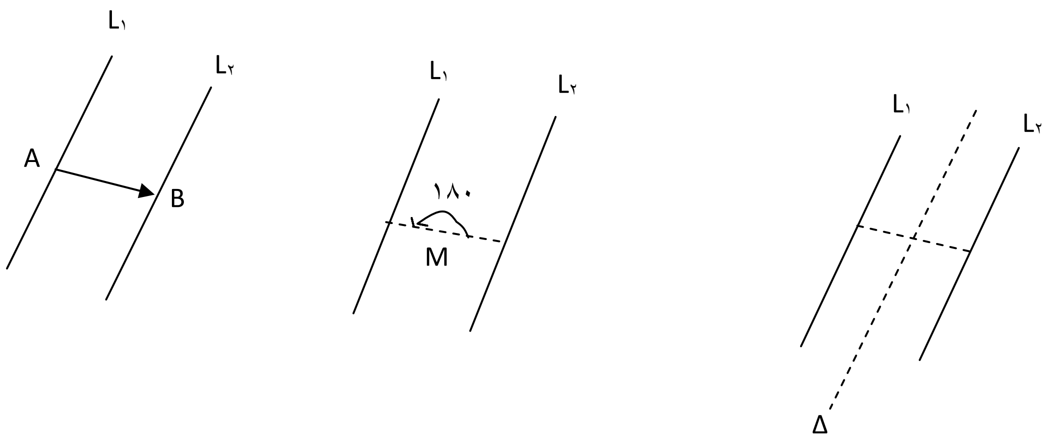
$$\left.\begin{array}{l} m_{AB} = \frac{۱+۲}{۲-۰} = \frac{۳}{۲} \\ m_{A'B'} = \frac{۲+۴}{۴-۰} = \frac{۳}{۲} \end{array}\right\} \qquad m_{AB} = m_{A'B'}$$

ویژگی های تبدیلات :

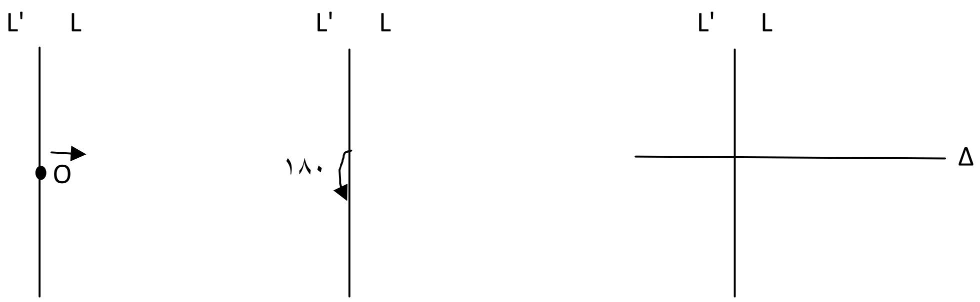
این ویژگی‌ها که به عنوان اصول در اثبات قضایا به کار می‌روند عبارت‌اند از:

۱) طول پاره‌خط و اندازه‌ی زاویه‌ی تحت انتقال، دوران، بازتاب ثابت می‌ماند.

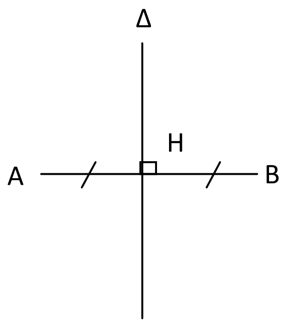
۲) اگر دو خط موازی هم باشند هر یک می‌تواند انتقال یافته‌ی دیگری باشد. تحت $\overrightarrow{AB}$ ، دوران یافته‌ی دیگری باشد به زاویه‌ی ۱۸۰ و بازتاب دیگری باشد نسبت به عمودمنصف فاصله‌ی آن دو خط.



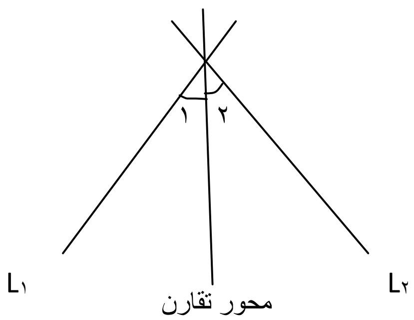
۳) سه خط می‌تواند تحت یک منتقال با بردار $\overrightarrow{o}$ ، دوران ۱۸۰ حول یک نقطه از آن خط و بازتاب نسبت به محور عمود بر آن خط بر خودش تصویر شود.

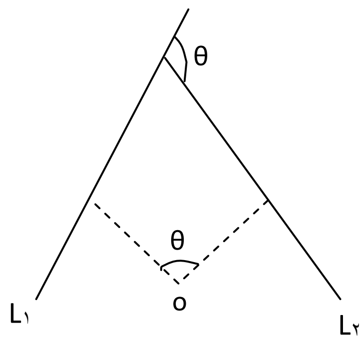


۴) عمودمنصف یک پاره‌خط محور تقارن بازتابی است که ابتدا را به انتها و برعکس تصویر می‌کند.

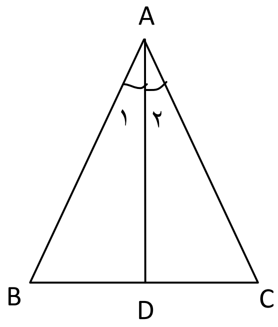


۵) اگر دو خط متقاطع باشند هریک ی‌تواند تصویر دیگری باشد تحت بازتاب نسبت به نیم‌ساز زاویه‌ی بین آنها دو خط دوران یافته‌ی دیگری باشد تحت زاویه‌ی بین آن دو خط.





قضیه : با استفاده از بازتاب ثابت کنید زوایای مجاور به ساقها در مثلث متساوی‌الساقین با هم برابراند:



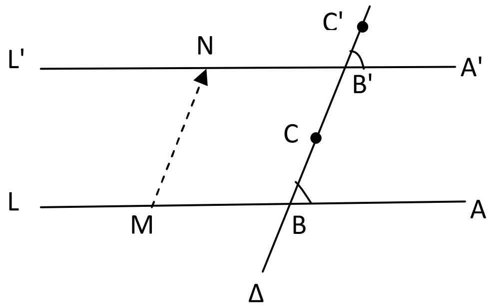
فرض $AB = AC$

حکم $B = C$

نیمساز زاویه A را رسم می‌کنیم تا ضلع BC را در نقطه‌ی D قطع کند تحت بازتاب نسبت به خط AD نتیجه می‌شود : $AB \longrightarrow AC$

و چون بنا به فرض $AB = AC$ است در نتیجه $B \longrightarrow C$ بنابراین $B = C$ خواهد بود.

قضیه : با استفاده از انتقال ثابت کنید اگر خطی مورب دو خط متوازی را قطع نماید زوایای متناظر مساوی هم خواهند بود.



فرض : $L \parallel L'$, Δمورب

حکم : $B = B'$

از نقطه‌ی M روی خط L بردار $\vec{V}$ را موازی با خط مورب رسم می‌کنیم تا در نقطه‌ی N خط L' را قطع نماید. می‌دانیم تحت یک انتقال بردارهایی که هر نقطه را به نقطه‌ی نظیرش تصویر می‌کند با هم برابراند.

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \vec{V}$$

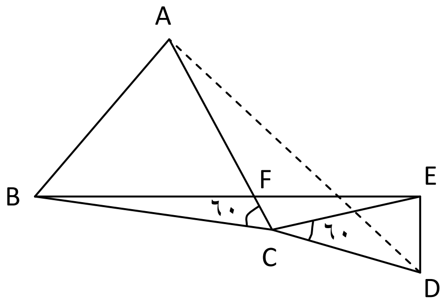
$$\left.\begin{array}{l} A \longrightarrow A' \\ B \longrightarrow B' \\ C \longrightarrow C' \end{array}\right\} \qquad A\hat{B}C = A'\hat{B'}C'$$

انتقال اندازه‌ی زاویه را حفظ می‌کند.

مثال : مثلث های ABC و ECD متساوی‌الاضلاع هستند. با استفاده از دوران ثابت کنید :

$\widehat{AFB} = ۶۰°$, $BE = AD$

حل : اگر c را مرکز دوران در نظر بگیریم تحت دوران با زاویه‌ی ۶۰ می‌توان گفت :



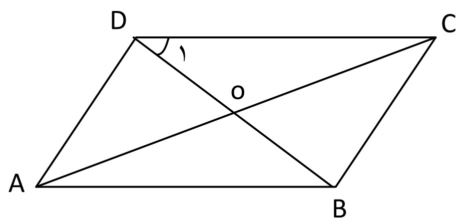
$$\left.\begin{array}{l} D \longrightarrow E \\ A \longrightarrow B \end{array}\right\} \quad AD \longrightarrow BE$$

می‌دانیم دوران طول پاره‌خط را حفظ می‌کند در نتیجه :

$AD = BE$

از طرف دیگر می‌دانیم زاویه‌ی بین خط و تصویرش تحت یک دوران با زاویه‌ی دوران مساوی است. بنابراین زاویه‌ی بین دو خط AD و BE یعنی زاویه‌ی $\widehat{AFB}$ برابر ۶۰ خواهد بود.

مثال : قطرهای چهارضلعی ABCD یکدیگر را نصف کرده‌اند با استفاده از دوران ثابت کنید ABCD یک متوازی‌الاضلاع است.



اگر o را مرکز دوران در نظر بگیریم می‌دانیم تحت دوران ۱۸۰ هر خط بر روی خودش تصویر می‌شود بنابراین تحت دوران به مرکز o و زاویه‌ی ۱۸۰ OD بر OB و OC بر OA تصویر می‌شود و چون OD = OB و OC = OA است:

$$\left.\begin{array}{l} B \longrightarrow D \\ A \longrightarrow C \end{array}\right\} \quad AD \longrightarrow DC$$

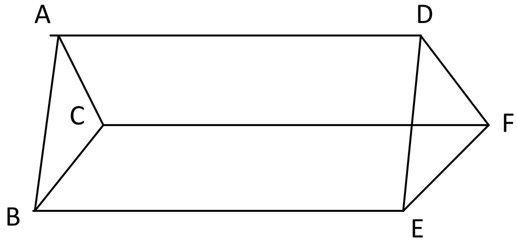
چون دوران طول پاره‌خط را حفظ می‌کند بنابراین $AD = DC$.

چون دوران اندازه‌ی زاویه را حفظ می‌کند $AB \parallel DC \quad \Longleftarrow \quad B_۱ = D_۱$

پس ABCD متوازی‌الاضلاع است.

مثال : پاره خط‌های AD , BE , CF مساوی و موازی اند . با استفاده از انتقال ثابت کنید :

$$\overset{\triangle}{ABC} \equiv \overset{\triangle}{DEF}$$



$AD \overset{||}{=} CF \overset{||}{=} BE$ $\qquad$ $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{V}$

بنابراین اگر $\overrightarrow{V}$ را بردار انتقال در نظر بگیریم می‌توان نوشت :

$$\left.\begin{array}{l} B \longrightarrow E \\ C \longrightarrow F \\ A \longrightarrow D \end{array}\right\} \quad \overset{\triangle}{ABC} \longrightarrow \overset{\triangle}{DEF} \Longrightarrow \overset{\triangle}{ABC} \equiv \overset{\triangle}{DEF}$$

زیرا تحت انتقال تصویر هر شکل با خودش هم‌نهشت است.