فصل اول:

استدلال در هندسه:

1- استدلال استقرایی 2- استدلال استنتاجی

* استدلال استقرایی:

روشی است که در آن از مشاهده‌ی نتایج چند مورد به نتیجه‌ی کلی می‌رسیم.

مثال 1: به طریق استدلال استقرایی مجموع زوایای یک چندضلعی محدب را محاسبه کنید.

(مهم)

حل:

چندضلعی	3	4	5	8	...	n
تعداد مثلثهای ایجادشده	1	2	3	6	...	$n-2$
مجموع زوایا	1×180	2×180	3×180	6×180	...	$n-2$

مجموع زوایای داخلی nضلعی محدب $=180\times(n-2)$

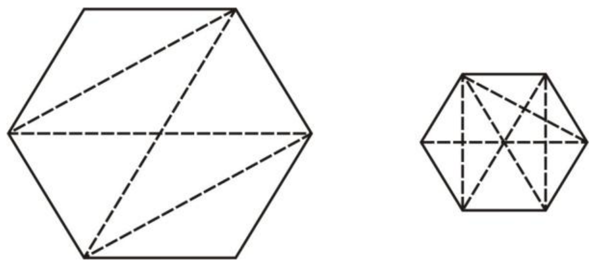
مثال 2: به طریق استدلال استقرایی مجموع قطرهای یک چندضلعی محدب را محاسبه کنید.

چندضلعی	3	4	5	6	...	n
تعداد قطرهای گذرنده از یک رأس	0	1	2	3	...	$n-3$
مجموع قطرها	0	$\frac{4\times1}{2}$	$\frac{5\times2}{2}$	$\frac{6\times3}{2}$	...	$\frac{n(n-3)}{2}$

مجموع قطرهای nضلعی محدب $= \dfrac{n(n-3)}{2}$

تعریف قطرهای چندضلعی:

پاره‌خطی است که دو رأس غیر مجاور را به هم وصل می‌کند.



مثال 3: در کدام چندضلعی تعداد قطرها 4 برابر تعداد اضلاع است؟

حل:

$$\underbrace{\frac{n(n-3)}{2}}_{\text{تعداد قطرها}} = \frac{4n}{1} \Rightarrow \cancel{n}(n-3)=8\cancel{n} \Rightarrow n-3=8$$

n = تعداد اضلاع

$$n=11$$

مثال 4: در کدام چندضلعی تعداد قطرها مساوی تعداد اضلاع است؟

$$\frac{n(n-3)}{2}=\frac{n}{1} \Rightarrow \cancel{n}(n-3)=2\cancel{n} \Rightarrow n-3=2$$

n = تعداد اضلاع

$$n=5$$

مثال 5: هرگاه به اضلاع یک nضلعی یک ضلع اضافه کنیم به تعداد قطرها چقدر افزوده می‌شود؟ (مهم)

حل:

تعداد قطرهای nضلعی $= \dfrac{n(n-3)}{2}$

$$\text{تعداد قطرهای } n+1 \text{ ضلعی} = \frac{(n+1)(n-2)}{2}$$

$$\text{تعداد قطرهای افزوده شده} = \frac{(n+1)(n-2)}{2} - \frac{n(n-3)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(n-2) - n(n-3)}{2}$$

$$= \frac{\cancel{n^2} + n - 2n - 2 - \cancel{n^2} + 3n}{2} = \frac{2n-2}{2}$$

$$= \frac{\cancel{2}(n-1)}{\cancel{2}} = n-1$$

* وقتی به nضلعی یک ضلع اضافه کنیم تعداد قطرهای افزوده شده $n-1$ تا خواهد بود.

تست: اگر تعداد قطرهای یک 25ضلعی محدب 275 باشد تعداد قطرهای یک 26ضلعی محدب کدام است؟

1) 300   2) 299   3) 301   4) 303

$$\text{تعداد قطرهای افزوده شده} = n-1 = 25-1 = 24$$

$$\text{تعداد قطرهای 26 ضلع محدب} = 275 + 24 = 299$$

مثال 6: مجموع زوایای داخلی یک 10ضلعی را حساب کنید.

حل: $180(n-2) = 180(10-2) = 180 \times 8 = 1440$

مثال 7: تعداد اضلاع را پیدا کنید. (در چندضلعی) که مجموع زوایای آن $2520°$ باشند.

حل:

$$180(n-2) = 2520$$

$$n-2=\frac{252\cancel{0}}{18\cancel{0}} \Rightarrow n-2=14$$

$$n=16$$

مثال 8: تعداد اضلاع چندضلعی را پیدا کنید کـه مجمـوع انـدازه‌هـای زاویـه‌هـای آن <u>3</u> برابـر اندازه‌های یک شش‌ضلعی محدب باشد.

$$180(\underset{\substack{\downarrow \\ 6}}{n}-2)=4\times180$$

$$\underbrace{1\cancel{8}0(n-2)}_{\text{مجموع زوایای n ضلعی محدب}}=3\times4\times1\cancel{8}0 \Rightarrow n-2=12$$

$$n=14$$

مجموع زوایای 6 ضلعی محدب $=180\times(n-2)=180\times(6-2)=180\times4$

مثال 9: مجموع زوایای داخلی یک nضلعی محدب $1260°$ می‌باشد: (مهم)

اولاً: تعداد اضلاع

ثانیاً: تعداد قطرها را محاسبه کنید.

حل:

اولاً:

$$180(n-2)=1260$$

$$n-2=\frac{1\cancel{2}60}{1\cancel{8}0} \Rightarrow n-2=7 \Rightarrow n=9$$

ثانیاً:

تعداد قطرها $=\frac{n(n-3)}{2}=\frac{9(9-3)}{2}=\frac{9\times6}{2}=27$

تست: مجموع تعداد اضلاع و قطرهای یک چندضلعی محدب برابر 21 است تعداد اضلاع کدام است؟

$$n+\frac{n(n-3)}{2}=21 \Rightarrow \frac{n}{1}+\frac{n(n-3)}{2}=21$$

$$\frac{2n+n(n-3)}{2}=\frac{21}{1} \Rightarrow 2n+n(n-3)=42$$

$$2n+n^2-3n=42$$

$$n^2-n-42=0$$

$$(n+6)(n-7)=0$$

$$\underset{\text{غ.ق.ق}}{n=-6} \qquad \underset{\text{ق.ق}}{n=7}$$

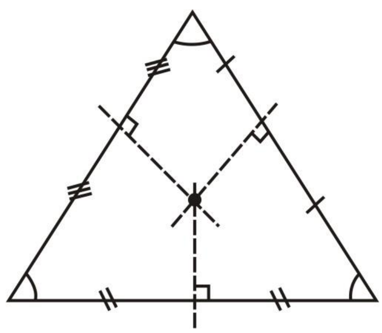
1) 5 2) 6 3) 7 4) 8

مثلث قائم‌الزاویه $0<\theta<90$

مثال: سه مثلث رسم کنید که در یکی هر سه زاویه حاده در درس یک زاویه قائمه و در سومی یک زاویه منفرجه باشد سپس موقعیت نقطه‌ی همرسی عمودمنصف‌ها را در هر مثلث بررسی کنید.

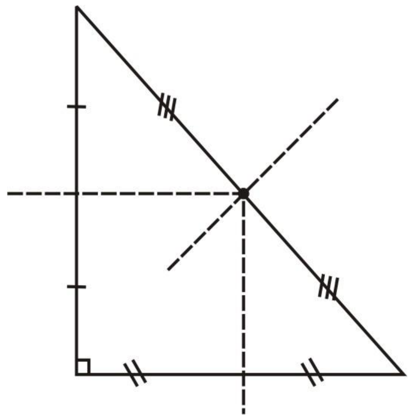
$90<\theta<180$

نقطه‌ی همرسی درون مثلث



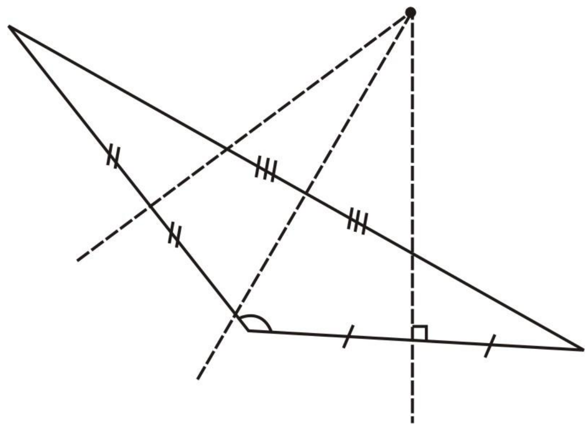
(هر سه زاویه حاده)

نقطه‌ی همرسی روی وتر در وسط وتر



(مثلث قائم الزاویه)

نقطه‌ی همرسی در خارج مثلث



(مثلث منفرجه)

* نتیجه‌گیری: نقطه ی همرسی عمودمنصف‌ها

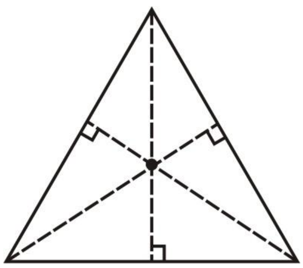
1- در مثلث هر زاویه حاده ← در درون مثلث

2- مثلث قائم‌الزاویه ← روی وتر و وسط وتر

3- در مثلث هر زاویه منفرجه ← خارج مثلث

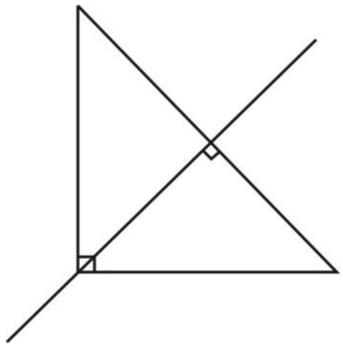
مثال: بررسی قبلی را در حدود نقطه‌ی همرسی ارتفاع‌ها در هر مثلث انجام دهید.

نقطه‌ی همرسی ارتفاع ما درون مثلث است.



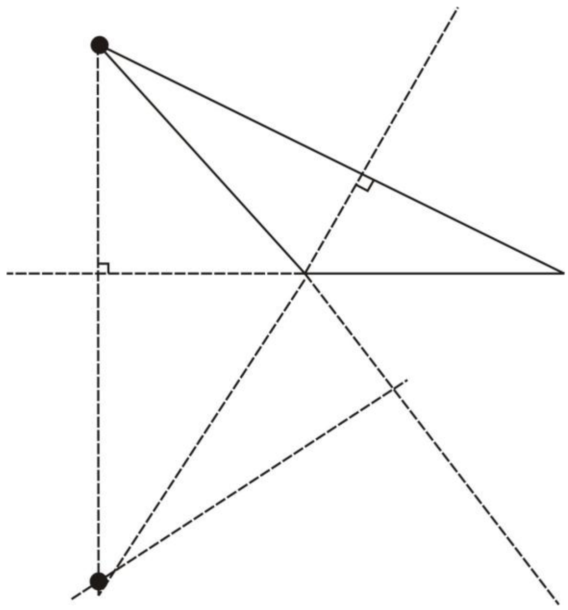
(هر سه زاویه حاده)

نقطه‌ی هموسی دو رأس قائمه است.



(مثلث قائم الزاویه)

نقطه‌ی هموسی خارج مثلث



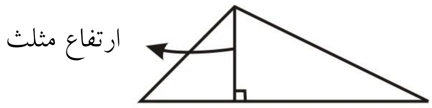
نتیجه‌گیری:

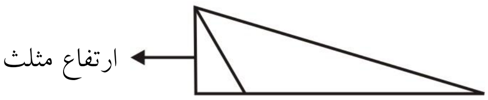
نقطه‌ی هموسی ارتفاع‌ها:

1- در مثلث هر زاویه حاده ← درون مثلث

2- مثلث قائم‌الزاویه ← در رأس قائمه

3- مثلث یک زاویه منفرجه ← بدون مثلث





تست: محل برخورد عمودمنصف اضلاع مثلث ABC در خارج آن مثلث است. مثلث کدام است؟

حل: مثلث منفرجه الزاویه

تست: محل برخورد عمودمنصف‌های اضلاع یک مثلث روی یک ضلع آن مثلث واقع است. نوع مثلث کدام است؟

حل: مثلث قائم‌الزاویه

نکته:

$a^2 = b^2 + c^2 \; : \; \hat{A} = 90$ زاویه قائمه

$a^2 > b^2 + c^2 \; : \; \hat{A} > 90$ زاویه منفرجه

$a^2 < b^2 + c^2 \; : \; \hat{A} < 90$ زاویه حاده

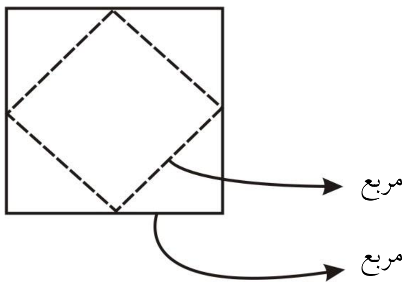
مثال: در مثلث ABC داریم: $c = 6 \, , b = 4 \, , a = 2$ محل تلاقی ارتفاعات و نیز محل تلاقی عمودمنصف‌ها به ترتیب در کجا قرار دارند؟

$$\left.\begin{array}{l}6^2 > 4^2 + 3^2 \\ 36 > 16+9\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{C} > 90 \Rightarrow$$ مثلث منفرجه‌الزاویه است

نقطه‌ی هموسی ارتفاعات و عمودمنصف در خارج مثلث است.

* مثال: اوساط اضلاع یک چهارضلعی را بهم وصل می‌کنیم شکل حاصل مربع مـی‌گـردد نـوع چهارضلعی اولیه کدام است؟

1) لوزی 2) مربع 3) مستطیل 4) متوازی‌الاضلاع



* استدلال استنتاجی: (مهم)

روش نتیجه‌گیری کلی بر اساس حقایق همیشه درست یا فرض می‌باشد.

قضیه شرطی:

استدلالی است که در آن نتیجه می گیریم اگر فـرض درسـت باشـد آنگـاه حکـم نیـز درسـت می‌باشد و آنرا با نماد $p \Rightarrow q$ نشان می‌دهند و می‌خوانیم اگر p آنگاه q.

* تذکر اول: قضیه شرطی به یک ترکیب شرطی همیشه درست گفته می‌شود.

تذکر دوم: در قضیه شرطی فرض را شرط کافی برای حکم و حکم را شرط لازم بـرای فـرض گویند.

عکس قضیه شرطی:

اگر دو قضیه شرطی $p \Rightarrow q$ جای فرض و حکم را عوض کنیم ترکیب حاصل را عکس قضیه شرطی می‌گویند. ($q \Rightarrow p$).

سؤال (مهم):

آیا عکس قضیه شرطی همیشه یک قضیه شرطی است؟ (مثال بزنید).

خیر- در صورتی عکس قضیه‌ی شرطی یک قضیه شرطی است که ترکیب حاصل درست باشد.

(مثال) اگر دو زاویه قائمه باشند آنگاه مکمل یکدیگرند. (قضیه شرطی) $\underset{\text{قائمه}}{90}+\underset{\text{قائمه}}{90}=\underset{\text{مکمل}}{180}$

عکس قضیه صحیح نیست زیرا دو زاویه می‌توانند مکمل هم باشند اما اندازه‌ی هر یک $90°$ نباشد.

$$180=40+40$$
$$180=30+150$$
$$180=120+60$$

قضیه دوشرطی:

اگر $p \Rightarrow q$ یک قضیه شرطی و عکس آن $q \Rightarrow p$ هم یک قضیه شرطی باشد آنگاه می‌توان این دو قضیه را بصورت یک قضیه دوشرطی بیان نمود.

$$p \Rightarrow q \leftarrow \begin{cases} p \Rightarrow q \\ q \Rightarrow p \end{cases}$$

صورتهای مختلف قضیه دوشرطی:

1) اگر p آنگاه q و برعکس.

2) q اگر و تنها اگر p.

3) p شرط لازم و کافی برای q است.

4) q شرط لازم و کافی برای p است.

مثال: در قضیه‌های شرطی زیر تحقیق کنید عکس کدامیک از آنها یک قضیه شرطی است سپس آنرا بصورت دوشرطی بیان کنید.

الف) اگر دو صفحه‌ی متمایز P', P متوازی باشند آنگاه $P \cap P' = \phi$: (قضیه شرطی)

اگر در دو صفحه‌ی متمایز P', P ، $P \cap P' = \phi$ آنگاه دو صفحه متوازی‌اند.

(عکس قضیه شرطی) (درست)

قضیه دوشرطی: در دو صفحه‌ی متمایز P', P ، $P \cap P' = \phi$ است اگر تنها اگر دو صفحه، متوازی باشند.

ب) اگر یک مثلث متساوی‌الاضلاع باشند آنگاه متساوی‌الساقین است. (قضیه شرطی)

اگر مثلثی متساوی‌الساقین باشد آنگاه متساوی‌الاضلاع است (نادرست).

(عکس قضیه شرطی)

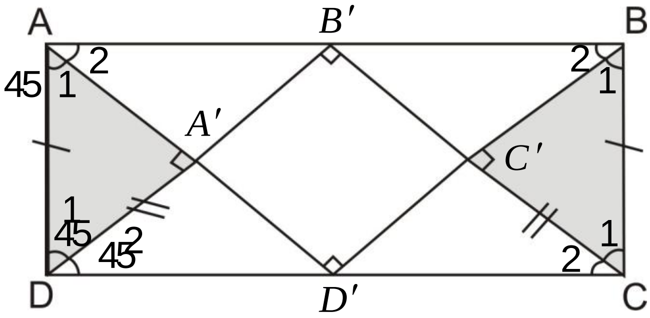
چون عکس قضیه دوشرطی نادرست است پس نمی‌توان بصورت دوشرطی بیان کرد.

* قضیه: (مهم)

نشان دهید شکل حاصل از برخورد نیم‌سازهای هر مستطیل یک مربع است.

مستطیل ABCD : فرض

مربع $A'B'C'D'$: حکم



برهـــان: نـــیم‌ســـاز زوایـــای مســـتطیل را رســـم مـــی‌کنـــیم درنتیجـــه هـــر کـــدام از

زوایای $A_1, A_2, B_1, B_2, \ldots$ برابر $45°$ خواهد بود.

$$\overset{\Delta}{AA'D}: \hat{A}_1 = \hat{D}_1 = 45° \rightarrow \hat{A}' = 90°$$

به طریق مشابه $: \hat{C}' = 90°$

$$\overset{\Delta}{DCB'}: \hat{D}_2 = \hat{C}_2 = 45 \Rightarrow \hat{B}' = 90°$$

به طریق مشابه $: \hat{D}' = 90°$

بنابراین چهارضلعی $A'B'C'D'$ با قائمه‌بودن زوایایش مستطیل است کافی است ثابت کنیم دو ضلع مجاور آن با هم برابرند.

$$\overset{\Delta}{DCB'}: \hat{D}_2 = \hat{C}_2 \Rightarrow B'D = B'C$$

$$\overset{\Delta}{ADA'} \cong \overset{\Delta}{BCC'} \Rightarrow DA' = CC'$$

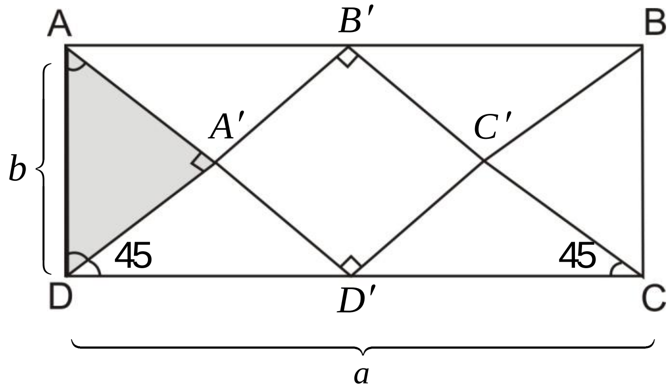
$$\overline{}$$

$$A'B' = B'C'$$

به طریق مشابه : $A'D' = D'C'$ $\Rightarrow$ چهار ضلع مربع است.

مثال: با توجه به قضیه‌ی قبل رابطه‌ی بین ضلع مربع و اندازه‌ی مستطیل را بدست آورید.

$$\begin{cases} b = \text{عرض مستطیل} \\ a = \text{طول مستطیل} \end{cases}$$



$$\overset{\Delta}{DCB}:\begin{cases}\hat{B}'=90 \Rightarrow DB'^2+B'C^2=DC^2 \Rightarrow 2DB'^2=a^2\\ DB'=B'C \qquad\qquad DB'^2=\dfrac{a^2}{2}\end{cases}$$

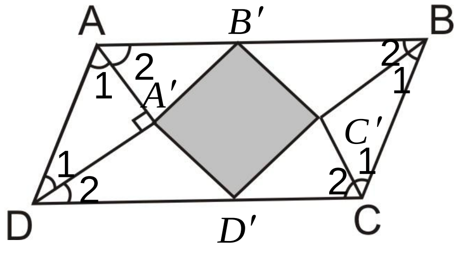
$$\frac{a}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{a\sqrt{2}}{2} \qquad DB'=\frac{a}{\sqrt{2}}=\frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow DB'=\frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\overset{\Delta}{ADA'}:\begin{cases}\hat{A}'=90 \Rightarrow AA'^2+A'D^2=AD^2 \Rightarrow 2A'D^2=b^2\\ AA'=A'D \qquad\qquad A'D^2=\dfrac{b^2}{2}\end{cases}$$

$$A'D=\frac{b}{\sqrt{2}}=\frac{b\sqrt{2}}{2} \Rightarrow A'D=\frac{b\sqrt{2}}{2}$$

$$A'B' \text{ ضلع مربع } =DB'-DA'=\frac{a\sqrt{2}}{2}-\frac{b\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(a-b)$$

مثال (مهم): نشان دهید شکل حاصل از برخورد نیم‌سازهای هر متوازی‌الاضلاع یـک مسـتطیل است؟ (خرداد).



نیم‌ساز

$$\hat{A}_1=\hat{A}_2=\frac{1}{2}\hat{A}$$

$$\hat{D}_1=\hat{D}_2=\frac{1}{2}\hat{D}$$

می‌دانیم در هر متوازی‌الاضلاع زوایای مجاور مکمل یکدیگرند. بنابراین:

$$\hat{A}+\hat{D}=180\Rightarrow\frac{1}{2}\hat{A}+\frac{1}{2}\hat{D}=90^\circ\Rightarrow\hat{A}_1+\hat{D}_1=90^\circ$$

$$\Rightarrow\hat{A}'=90^\circ$$

به طریق مشابه : $\hat{C}'=90^\circ$

$$\hat{R}+\hat{C}=180\Rightarrow\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=90^\circ\Rightarrow\hat{B}_1+\hat{C}_1=90^\circ$$

به طریق مشابه : $\hat{C}'=90^\circ$

$$\hat{D}+\hat{C}=180\Rightarrow\frac{1}{2}\hat{D}+\frac{1}{2}\hat{C}=90^\circ\Rightarrow\hat{D}_2+\hat{C}_2=90^\circ$$

$$\Rightarrow\hat{B}'=90^\circ$$

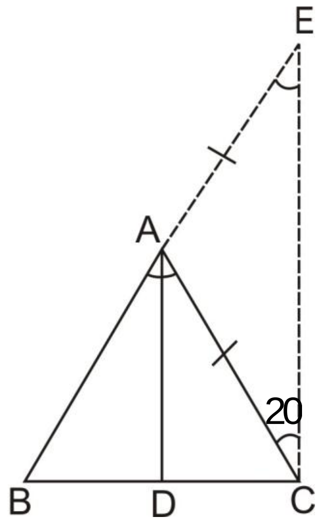
به طریق مشابه : $\hat{D}'=90^\circ$

بنابراین $A'B'C'D'$ با قائمه‌بودن زوایایش مستطیل است.

دو زاویه مجاور در متوازی‌الاضلاع متصل‌اند. $\Rightarrow \quad 1+2=180$

قضیه (مهم):

ثابت کنید در هر مثلث نیم‌ساز هر زاویه ضلع مقابل را به نسبت دو ضلع دیگر قطع می‌کند.



$$\begin{cases} \text{فرض} : \hat{A}_1=\hat{A}_2 \\ \text{حکم} : \dfrac{BD}{DC}=\dfrac{AB}{AC} \end{cases}$$

برهان: از رأس C خطی موازی با نیم‌ساز AD رسم می‌کنیم تا امتداد AB را در نقطه‌ی E قطع کند.

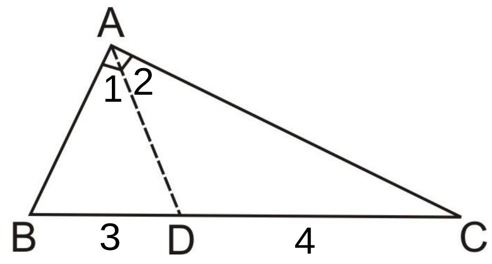
$$AD \parallel CE \begin{cases} \text{AC مورب} \Rightarrow \hat{C}_2=\hat{A}_2 \\ \text{BE مورب} \Rightarrow \hat{E}=\hat{A}_1=\hat{A}_2 \end{cases} \Rightarrow \hat{C}_2=\hat{E}$$

$$\Rightarrow AE=AC$$

$$AD \parallel CE \xrightarrow{\text{بنا به رابطه تالس}} \frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AE}$$

$$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$$

مثال: در شکل مقابل مثلث ABC در رأس A قائمه است و AD نیمساز می‌باشد. با توجه به اندازه‌های داده شده اندازه‌های دو ضلع دیگر را پیدا کنید.



$$\hat{A}_1=\hat{A}_2 \xrightarrow[\text{نیم‌ساز}]{\text{بنا به قضیه}} \frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{AB}{AC}=\frac{3}{4}$$

$$AB=\frac{3}{4}AC$$

$$\hat{A}=90 \Rightarrow AB^2+AC^2=BC^2 \Rightarrow \left(\frac{3}{4}AC\right)^2+AC^2=7^2$$

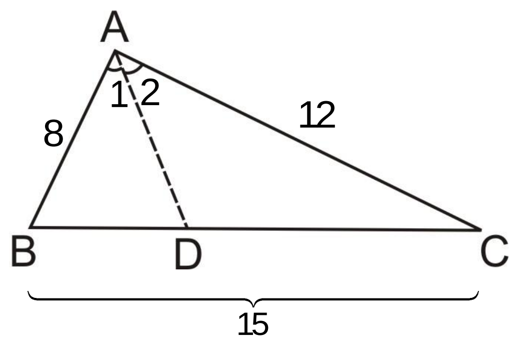
$$\frac{9}{16}AC^2+AC^2=49 \Rightarrow \frac{25}{16}AC^2=49 \Rightarrow \frac{25}{16}AC^2=49$$

$$AC^2=\frac{49}{\frac{25}{16}} \Rightarrow AC^2=\frac{49\times 16}{25} \Rightarrow AC=\sqrt{\frac{49\times 16}{25}}$$

$$AC=\frac{7\times 4}{5}=\frac{28}{5} \Rightarrow AC=\frac{28}{5}$$

$$AB=\frac{3}{4}AC=\frac{3}{4}\times\frac{28}{5}=\frac{21}{5}$$

مثال: سه ضلع 8 , 12 , 15 سانتی‌متر است اندازه‌ی پاره‌خط‌هایی که نیم‌ساز درونی زاویه‌ی بزرگتری مثلث بر ضلع مقابل آن پدید می‌آورد را تعیین کنید.



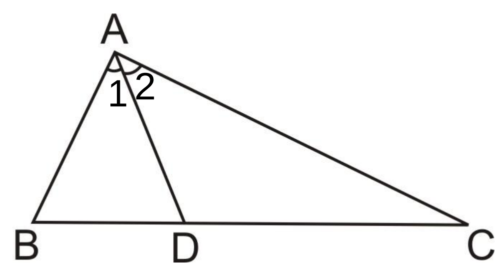
$$\hat{A}_1=\hat{A}_2 \xrightarrow[\text{نیم‌ساز}]{\text{بنا به قضیه}} \frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{8}{12}=\frac{BD}{DC}$$

$$\frac{2}{3}=\frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{BD}{BD+DC}=\frac{2}{2+3} \Rightarrow \frac{BD}{15}=\frac{2}{5}$$

$$BD=\frac{2\times 15}{5}=6 \Rightarrow BD=6$$

$$DC=15-6=9$$

تست: در مثلثی رابطه‌ی $AB=\frac{2}{3}AC=\frac{1}{2}BC$ بین اضلاع برقرار است اگر D پای نیم‌ساز با $\hat{A}$ باشد BD چند برابر AB است.



1) $\frac{3}{4}$ 2) $\frac{4}{5}$ 3) $\frac{4}{3}$ 4) $\frac{5}{4}$

$$\hat{A}_1=\hat{A}_2 \xrightarrow[\text{نیم‌ساز}]{\text{بنا به قضیه}} \frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$$

$$\frac{\frac{2}{3}AC}{AC}=\frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{2}{3}=\frac{BD}{DC}$$

$$\frac{BD}{BD+DC}=\frac{2}{2+3} \Rightarrow \frac{BD}{BC}=\frac{2}{5} \Rightarrow BD=\frac{2}{5}BC$$

$$BC=\frac{2}{5}(2AB)=\frac{4}{5}AB$$

برهان خلف:

در اثبات برخی از قضایا از جعل در عکس قضیه چون به سادگی نمی‌توان از فرض شروع نمود با استفاده از اصول، تعاریف و سایر قضایا برقراری حکم را نشان داد لذا از اثبات غیرمستقیم استفاده می‌کنیم:

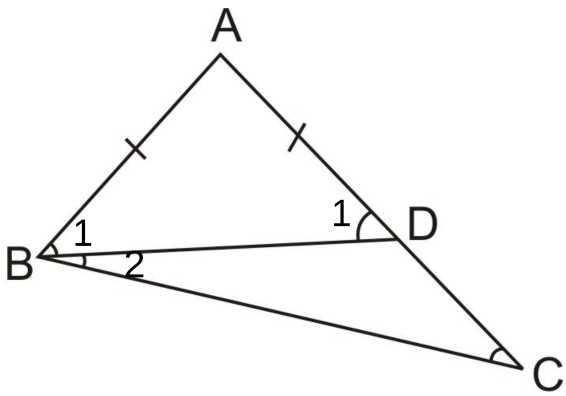
یا فرض می‌کنیم حکم درست نباشد.

به این صورت که نقیض حکم را درست فرض کرده یا فرض می‌کنیم حکم درست نباشد و با استفاده از این فرض به نتایجی می‌رسیم که با فرض اولیه در تناقض است بنابراین نتیجه می‌گیریم که حکم اولیه درست می‌باشد.

نتیجه: برای اینکه درستی قضیه‌ای از راه برهان خلف ثابت کنیم ثابت می‌کنیم که خلاف حکم نادرست است.

قضیه (مهم):

اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند زاویه مقابل به ضلع بزرگتر، بزرگتر است از زاویـه‌ی مقابـل به ضلع کوچکتر.



فرض: $AC > AB$

حکم: $\hat{B} > \hat{C}$

برهان: بروی ضلع AC , $AD = AB$ را جدا کرده و سپس D را به B وصل می‌کنیم.

زاویه خارجی از هر زاویه داخلی غیرمجاور بزرگتر است.

$$\overset{\Delta}{ABD} : AB = AD \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{D}_1$$

$$\overset{\Delta}{BDC} : \hat{D}_1 > \hat{C} \Rightarrow \hat{B}_1 > \hat{C}$$

$$\hat{B} = \hat{B}_1 + \hat{B}_2 \Rightarrow \hat{B} > \hat{B}_1,\ \hat{B}_1 > \hat{C} \Rightarrow \hat{B} > \hat{C}$$

عکس قضیه: اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند آنگاه ضلع مقابل به زاویـه‌ی بزرگتـر، بزرگتـر است از ضلع مقابل به زاویه‌ی کوچکتر.

فرض: $\hat{B} > \hat{C}$ حکم: $AC > AB$

برهان خلف:

$$AC \ngtr AB \Rightarrow \begin{cases} AC = AB \xrightarrow{\text{متساوی‌الساقین}} \hat{B} = \hat{C} & \text{خلاف فرض} \\ AC < AB \xrightarrow[\text{قضیه}]{\text{بنا به خود}} \hat{B} < \hat{C} & \text{خلاف فرض} \end{cases}$$

پس فرض خلف باطل و حکم درست است.

$$AC > AB$$

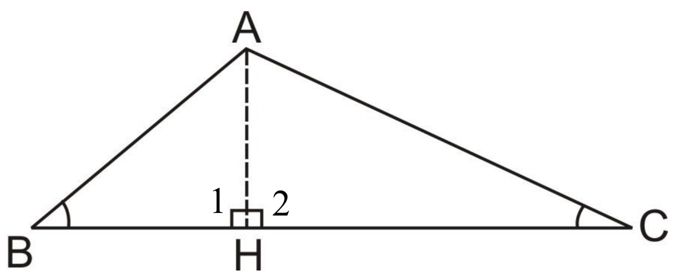
مثال: در مثلث ABC داریم:$AB = 2$،$AC = 3$, $BC = 4$ زوایای مثلث به ترتیب بزرگی اندازه‌ها نام ببرید.

$$BC > AC > AB \Rightarrow \hat{A} > \hat{B} > \hat{C}$$

مثال: (مهم) ثابت کنید در هر مثلث ارتفاع نظیر هر ضلع از نصف مجموع دو ضلع دیگر کوچکتر است.

فرض: $\hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ$

حکم: $AH < \frac{1}{2}(AB + AC)$



برهان:

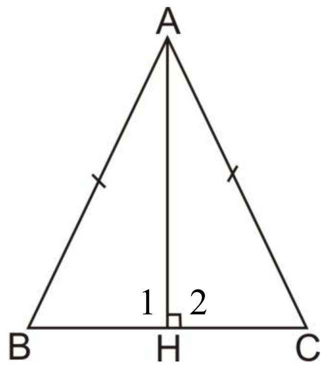
$$\overset{\Delta}{AHC}: \hat{H}_1 > \hat{C} \xrightarrow[\text{فرض}]{\text{با توجه به}} \hat{H}_2 > \hat{C} \Rightarrow AC > AH$$

$$AHB: \hat{H}_2 > \hat{B} \xrightarrow[\text{فرض}]{\text{با توجه به}} \hat{H}_1 > \hat{B} \Rightarrow AB > AH$$

$$+ \quad \overline{AC + AB > 2AH}$$

$$AH < \frac{1}{2}(AC + AB)$$

مثال: ثابت کنید در هر مثلث متساوی‌الساقین ارتفاع نظیر قاعده از هر یک از دو ساقی کوچکتر است.



فرض: $AB = AC = b$

حکم: $AH < b$

برهان:

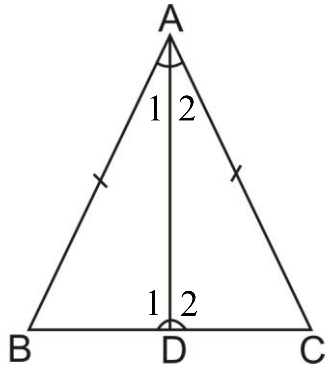
$$\hat{H}_1 > \hat{C} \Rightarrow \hat{H}_2 > \hat{C} \Rightarrow AC > AH \Rightarrow AH < b$$

مثال (مهم): در مثلث ABC , AD نیم‌ساز زاویه‌ی A است ثابت کنید:

$$AC > CD \;, AB > BD$$

فرض: $\hat{A}_1=\hat{A}_2$

حکم: $AC > CD \ , AB > BD$

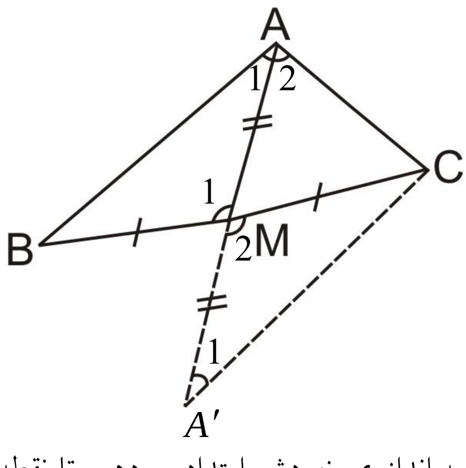


$$\overset{\Delta}{ADC} : \hat{D}_1 > \hat{A}_2 \xrightarrow{\text{با توجه به فرض}} \hat{D}_1 > \hat{A}_1 \Rightarrow AB > BD$$

$$ABD : \hat{D}_2 > \hat{A}_1 \xrightarrow{\text{با توجه به فرض}} \hat{D}_2 > \hat{A}_2 \Rightarrow AC > DC$$

مثال: در مثلث ABC اگر $AB > AC$, AM میانه باشد ثابت کنید:

$$\hat{A}_1 < \hat{A}_2$$



میانه AM را از طرف M به اندازه‌ی خودش امتداد می‌دهیم تا نقطه‌ی A' بدست آیـد سـپس

C را به A' وصل می کنیم و داریم:

$$\begin{cases} AM = MA' \\ BM = MC \\ \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \end{cases}$$

$$\overset{\text{فرض}}{\Rightarrow} \overset{\Delta}{ABM} \cong \overset{\Delta}{A'MC} \Rightarrow \begin{cases} \hat{A}'_1 = \hat{A}_1 \\ AB = A'C \end{cases}$$

بنا به فرض $: AB > AC \Rightarrow A'C > AC \Rightarrow \hat{A}_2 > \hat{A}'_1$

$$\Rightarrow \hat{A}_2 > \hat{A}_1$$

قضیه نامساوی مثلث (خرداد)

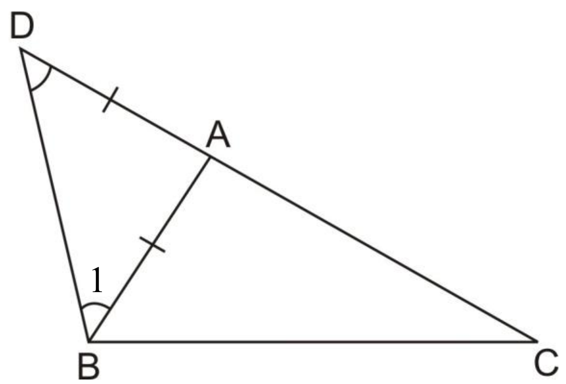
ثابت کنید در هر مثلث مجموع دو ضلع از طول ضلع سوم بزرگتر است.

فرض: ABC یک مثلث است.

حکم: AB+AC > BC

AB+BC > AC

AC+BC > AB



برهان: AC را از طرف A به اندازه‌ی AB امتداد می‌دهیم تا نقطه‌ی D بدست آیـد سـپس D را به B وصل می‌کنیم:

$$\overset{\Delta}{ABD} : AD = AB \Rightarrow \hat{D} = \hat{B}_1$$

$$: DC = AD + AC \Rightarrow DC = AB + AC$$ با توجه به شکل

$$, \hat{B}_1 = \hat{D}$$

$$\overset{\Delta}{DBC} : \hat{B} > \hat{B}_1 \Rightarrow \hat{B} > \hat{D} \Rightarrow DC > BC$$

$$\Rightarrow AB + AC > BC$$

نتیجه:

$$\begin{cases} a < b + c \\ a - c < b \end{cases} \Rightarrow \quad a - c < b < a + c$$

عکس قضیه: (قضیه وجود مثلث):

اگر c,b,a سه عدد حقیقی باشند بطوریکه هر یک از آنها از مجموع دو عـدد دیگـر کـوچکتر باشد آنگاه مثلثی به طول اضلاع c,b,a وجود دارد.

مثال: کدام دسته از اندازه‌های زیر می‌توانند اضلاع یک مثلث باشند:

1) $5,3,2$ 2) $7,2/5,4$ 3) $\sqrt{3},\sqrt{2},2$ 4) $\sqrt{5},\sqrt{5},5$

مثال: دو ضلع مثلثی به ترتیب 4 و 11 سانتی متر می باشد ضلع سوم که ضلع بزرگتر است بـا کدام اعداد صحیح می تواند بیان شود.

$b = 4 \qquad : c - b < a < b + c$

$c = 11 \qquad 11 - 4 < a < 4 + 11$

$$72a < 15 \Rightarrow a = 8,9,10,11,12,13,14$$

چون ضلع بزرگتر است سپس ضلع بدست آمده باید بزرگتر از 11 باشد.

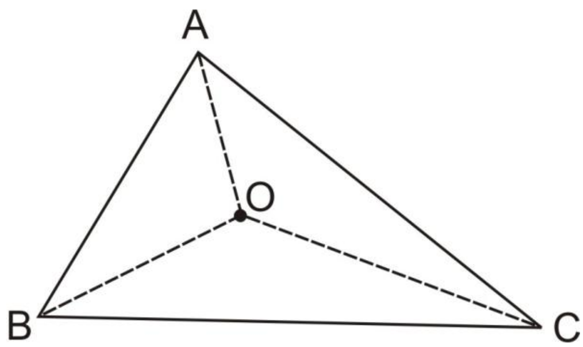
$$12,13,14$$

مثال: (مهم)

ثابت کنید مجموع فاصله های هر نقطه درون مثلث از سه رأس از نصف مجموع سه ضلع مثلث بزرگتر است.

فرض: O درون مثلث

حکم: $OA + OB + OC > \frac{1}{2}(AB + AC + BC)$



$\overset{\Delta}{OAB} : OA + OB > AB$

$\overset{\Delta}{OAC} : OA + OC > AC$

$\overset{\Delta}{OBC} : OB + OC > BC$

$+$

$2OA + 2OB + 2OC > AB + AC + BC$

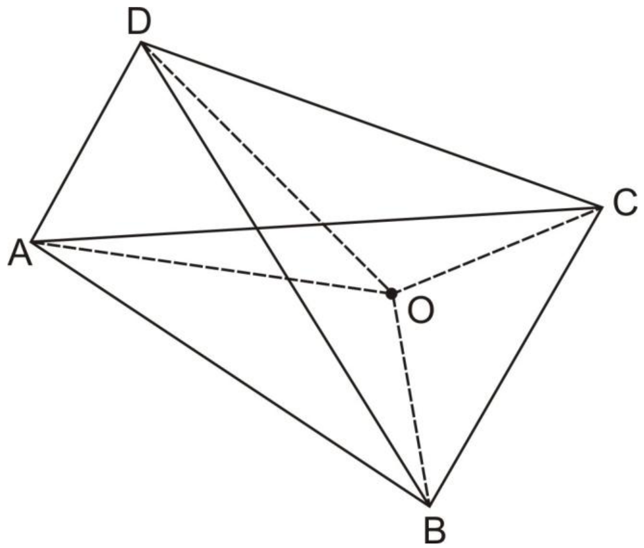
طرفین تقسیم بر:

$$OA+OB+OC>\frac{1}{2}(AB+AC+BC)$$

مثال: ثابت کنید در هر چهارضلعی محدب مجموع فاصله‌های هر نقطه درون آن از چهار رأس، از مجموع دو قطر بزرگتر است؟

فرض: ABCD چهارضلعی محدب و O درون چهارضلعی

حکم: $OA+OB+OC+OD>AC+BI$



$$\overset{\Delta}{OBD}:OD+OB>BD$$

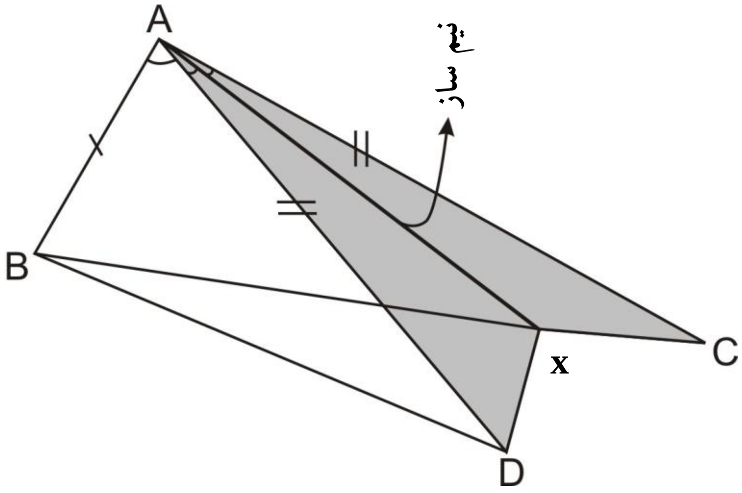
$$\overset{\Delta}{OAC}:OA+OC>AC$$

$$+$$

$$OA+OB+OC+OD>AC+BO$$

قضیه لولا: (مهم)

اگر دو ضلع از مثلثی با دو ضلع از مثلث دیگر برابر، زاویه‌ی بین آنها در دو مثلث، نابرابر باشند هر زاویه بزرگتر باشد ضلع مقابلش بزرگتر خواهد بود.



فرض : $AB = A'B'$

$, \hat{A} > \hat{A}'$

$AC = A'C'$

حکم : $BC > B'C'$

درون زاویه‌ی A ، $AD = A'C'$ به طوری جدا می‌کنیم که زاویه $\hat{A} = \hat{A}'$ باشد:

$$\overset{\Delta}{ABD} \cong \overset{\Delta}{A'B'C'} \Rightarrow BD = B'C'$$

نیم‌ساز زاویه $\overset{\Delta}{DAC}$ را رسم می‌کنیم تا ضلع BC را در نقطه M قطع کند سپس m را به D وصل می کنیم:

$$\overset{\Delta}{AMD} \cong \overset{\Delta}{AMC} \Rightarrow MD = MC$$

(ض ز ض)

بنا به رابطه‌ی نامساوی در مثلث $\overset{\Delta}{BMD}$ $: BM + MD > BD$

$$BM + MC > B'C'$$

$$BC > B'C'$$

عکس قضیه لولا: (مهم)

اگر دو ضلع از مثلثی با دو ضلع از مثلث دیگر برابر، ضلع سوم آن نابرابر باشد هر ضلع بزرگتر باشد زاویه‌ی مقابل‌اش بزرگتر خواهد بود.

حکم: $A > A'$

فرض: $\begin{aligned} AB &= A'B' \\ AC &= A'C' \\ BC &> B'C' \end{aligned}$

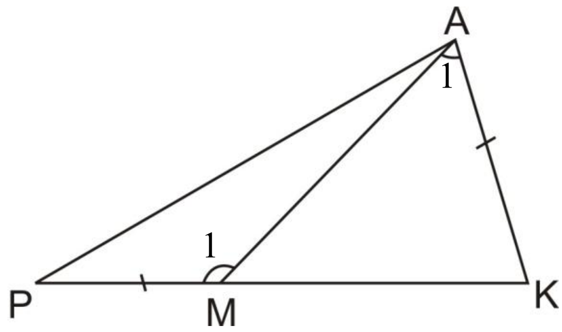
برهان خلف:

فرض خلف $: \hat{A} \not> \hat{A}' \Rightarrow \begin{cases} \hat{A} = \hat{A}' \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{A'B'C'} \Rightarrow BC = B'C' \\ \hat{A} < \hat{A}' \underset{\text{لولا}}{\overset{\text{بنا به قضیه}}{\Rightarrow}} BC < B'C' \end{cases}$

سپس فرض مثلث باطل و حکم ثابت می‌شود.

$$\hat{A} > \hat{A}'$$

مثال: در مثلث PAK اگر PM=AK باشد ثابت کنید AP > MK



$\overset{\Delta}{AMK}: \ \hat{M}_1 > \hat{A}_1$

$\overset{\Delta}{PAM}\ , \ \overset{\Delta}{AMK} \ : AM = AM$

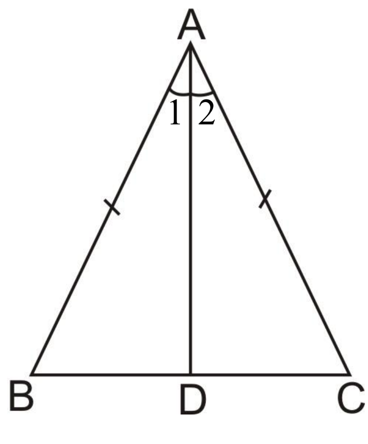
بنا به لولا

$, \hat{M}_1 > \hat{A}_1 \Rightarrow AP > MK$

$PM = AK$

مثال: در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC اگر BD < DC باشد ثابت کنید

$\hat{A}_1 < \hat{A}_2$



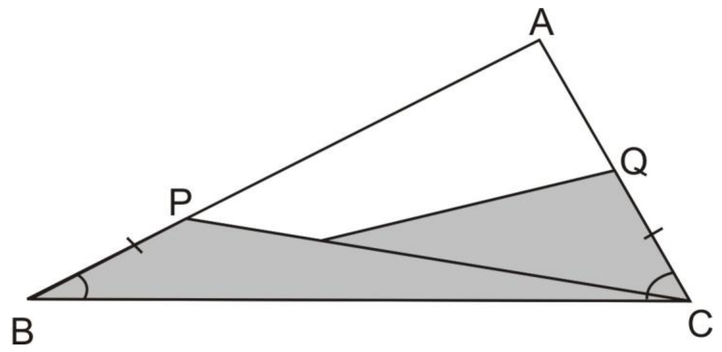
$$\overset{\Delta}{ABD}\ , \overset{\Delta}{ADC}: \begin{cases} AB = AC \\ \\ AD = AD \end{cases} \quad , \ BD < DC$$

عکس قضیه لولا

$\Longrightarrow \hat{A}_1 < \hat{A}_2$

مثال: در مثلث ABC اگر AB > AC، BP=CQ باشد ثابت کنید:

BQ > CP



$$\overset{\Delta}{ABC} : AB > AC \Rightarrow \hat{C} > \hat{B}$$

$$\overset{\Delta}{PBC} \;, \overset{\Delta}{QBC} : BP = CQ$$

$$, \hat{C} > \hat{B} \xRightarrow{\text{بنا به لولا}} BQ > PC$$

$$BC = BC$$

مکان هندسی:

به مجموعه نقاطی از صفحه یا فضا گفته می شود که دارای دو ویژگی زیر باشد:

1) همه‌ی آن نقاط دارای خاصیت معینی باشند (خاصیت مکان)

2) هر نقطه آن ویژگی را داشته باشد عضو آن مجموعه باشد. (عکس خاصیت مکان)

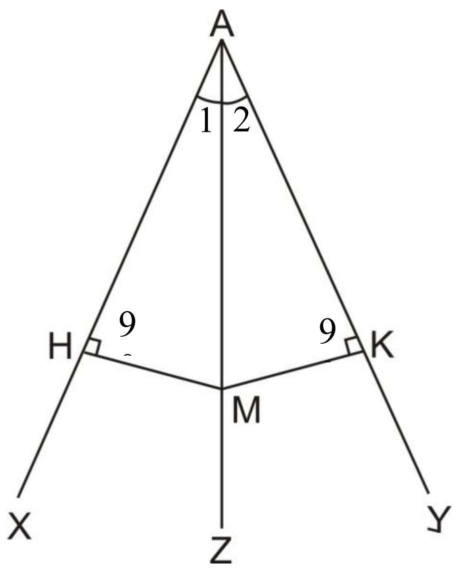
مثال: دایره مکان هندسی نقاطی از صفحه است که هر نقطه‌اش از نقطه‌ی ثابت بنام مرکز که بفاصله‌ی معین واقع شده است.

1- خاصیت مکان: هر نقطه واقع بر محیط دایره فاصله اش تا مرکز دایره برابر R است.

2- عکس خاصیت مکان: هر نقطه در صفحه که فاصله اش تا O برابـر R باشـد بـروی دایـره است.

<u>مثال (مهم)</u>: ثابت کنید نیم ساز هر زاویه مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.

خاصیت مکان: هر نقطه در صفحه روی نیم ساز زاویه از دو ضلع آن زاویه برابر است.



حالت اول:

حکم: $MH = MK$

فرض: $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}_1=\hat{A}_2\\ AM=AM\\ \hat{H}=\hat{K}\end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{AMH} \cong \overset{\Delta}{AMK}$$

$$\Rightarrow MH=MK$$

عکس خاصیت مکان: هر نقطه در صفحه که فاصله اش از دو ضلع زاویه برابر باشد روی نـیم ساز واقع است.

فرض: $MH=MK$

حکم: $\hat{A}_1=\hat{A}_2$

$$\left.\begin{array}{l}\hat{H}=\hat{K}=90\\ AM=AM\\ MH=MK\end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{AMH} \cong \overset{\Delta}{AMK} \Rightarrow \hat{A}_1=\hat{A}_2$$

الف) اثبات خاصیت مکان:

هر نقطه واقع بر نیم ساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.

فرض: $\hat{A}_1=\hat{A}_2 , M \in A\cancel{Z}$ (نیم ساز)

حکم: $MH=MK$

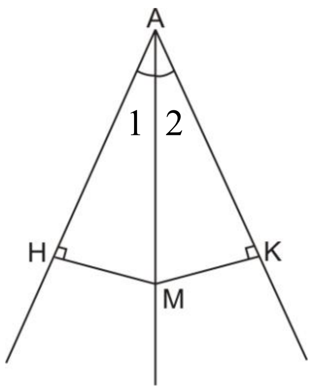
$$\left.\begin{aligned} &\hat{A}_1=\hat{A}_2 \\ &AM=AM \\ &\hat{H}=\hat{K}=90^\circ \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underset{\text{(وتر و یک زاویه حاده)}}{\overset{\Delta}{AMK} \cong \overset{\Delta}{AMH}} \Rightarrow MH=MK$$

ب) عکس خاصیت مکان:

هر نقطه در صفحه که فاصله اش از دو ضلع <u>زاویه ای به یک فاصله</u> باشد بر نیم ساز آن زاویه واقع است.

فرض: $MH=MK\ ,\ \hat{H}=\hat{K}=90^\circ$

حکم: (نیم ساز) $M \in A$Ƶ



وتر و یک ضلع زاویه قائمه

برهان:

$$\left.\begin{aligned} &\hat{H}=\hat{K}=90 \\ &MK=MH \\ &AM=AM \end{aligned}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{AMH} \cong \overset{\Delta}{AMK}$$

$$\Rightarrow \hat{A}_1=\hat{A}_2$$

نکته: عمودمنصف هر پاره‌خطی مکان هندسی نقاطی است که هر نقطه اش از دو سـر آن پـاره خط به یک فاصله است.

مثال: از عبارتهای زیر کدام درست و کدام نادرست است؟

1) عمودمنصف پاره خط تنها خطی است که بر وسط آن پاره خط می گذرد. × (نادرست)

2) عمودمنصف پاره خط تنها خطی است که هم نقاط از آن دو سر پاره خط به یک فاصله اند. × (نادرست).

3) عمودمنصف پاره خط تنها خطی است که هر نقطه اش از آن دو سر پاره خط به یک فاصله اند. √ (درست).

مثال: عبارتهای زیر را کامل کنید.

√ 1) هر نقطه که از دو ضلع زاویه به یک فاصله نباشد بر نیم ساز آن زاویه واقع نیست.

√ 2) عمودمنصف‌های هر پاره خط مکان هندسی نقاطی است که هر نقطـه اش از دو سـر آن پاره خط به یک فاصله است.

√ 3) مکان هندسی نقاطی که از دو ضلع زاویه ای به یک فاصله باشد بر نیم ساز آن.

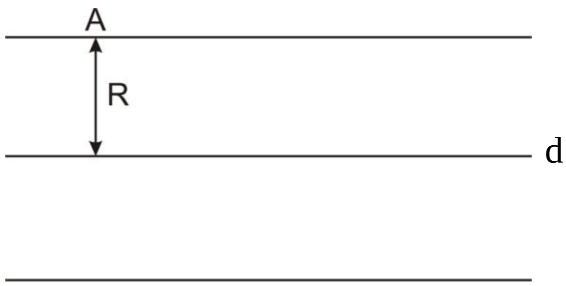
روش تعیین مکان هندسی از طریق استدلال استقرایی:

1) با توجه به ویژگیهای مسئله تعدادی نقطه ای پیدا می کنیم.

2) این نقاط را به هم می کنیم تا تصوری شهودی از مکان بدست آید.

3) مکان هندسی را توصیف می کنیم.

مثال: (مهم) مکان هندسی نقطه ای در صفحه را بیابید که از یک خط مفروض واقع بـر آن بـه یک فاصله باشد؟



فرض می کنیم فاصله نقطه‌ی A از خط d برابر R باشد.

1) تعدادی نقطه در صفحه پیدا می کنیم که به فاصله ی R از خط d واقع شده باشد.

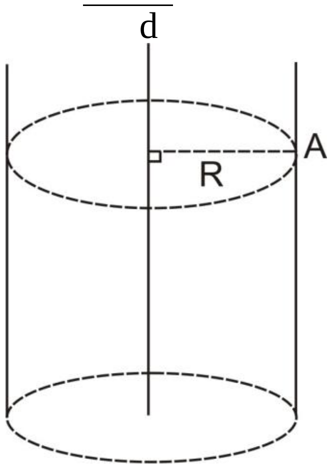
2) این نقاط را به هم وصل می کنیم شکل حاصل خط راست است.

3) مکان هندسی فوق خطی است موازی با خط d و به فاصله ی R از آن.

مسئله دو جواب دارد.

مثال (مهم): مکان هندسی نقطه ای در فضا را بدست آورید که از یک خـط مفـروض بـه یـک فاصله باشد؟

فرض می کنیم فاصله ی نقطه ی A از خط d در فضا برابر R باشد:



1) تعدادی نقطه پیدا می کنیم که از خط d به فاصله ی R واقع شده باشند.

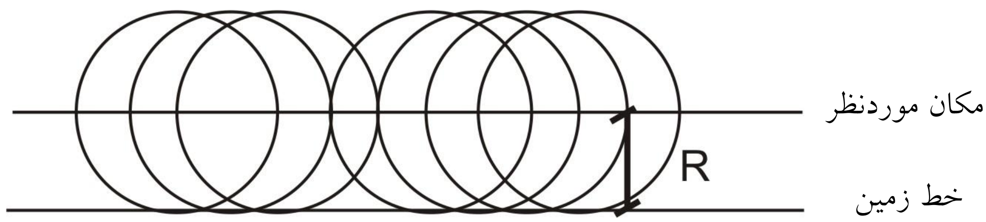
2) این نقاط را بهم وصل می کنیم شکل حاصل استوانه ای خواهد بود.

3) مکان هندسی فوق سطح استوانه ای است به شعاع R بطوریکه خط d محور آن است.

مسائل صفحه 37 (کتاب درسی)

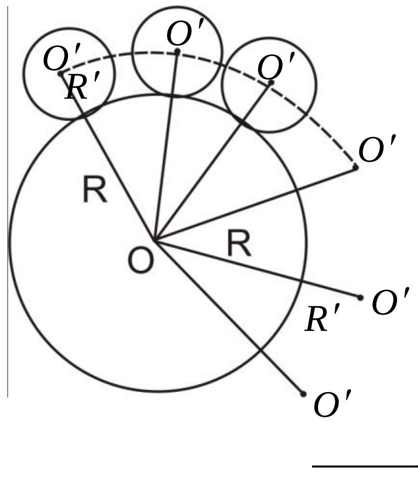
1- می دانیم شعاع دو نقطه ی تماس بر خط مماس عمود است پس (مکان هندسی موردنظر خطی موازی سطح است که فاصله آن از سطح صاف برابر شعاع توپ است). (مهم)

R



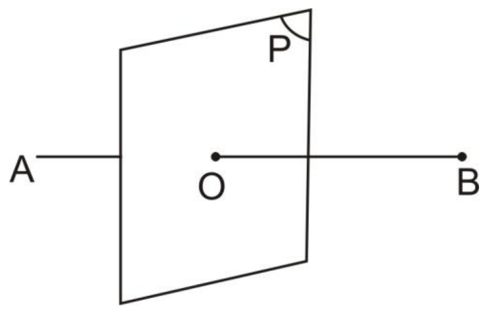
(شعاع بر خط مماس عمود است)

2- (مهم) مکان موردنظر دایره ای است به مرکز دایره ثابت و شعاع مجموع دو شعاع دایره ثابت و متحرک). یعنی اگر مرکز دایره ثابت O و شعاع آن R و مرکز دایره متحرک O' و شعاع آن R' باشد مکان موردنظر دایره ای به مرکز O و به شعاع $R+R'$ است.



مکان موردنظر ⟵

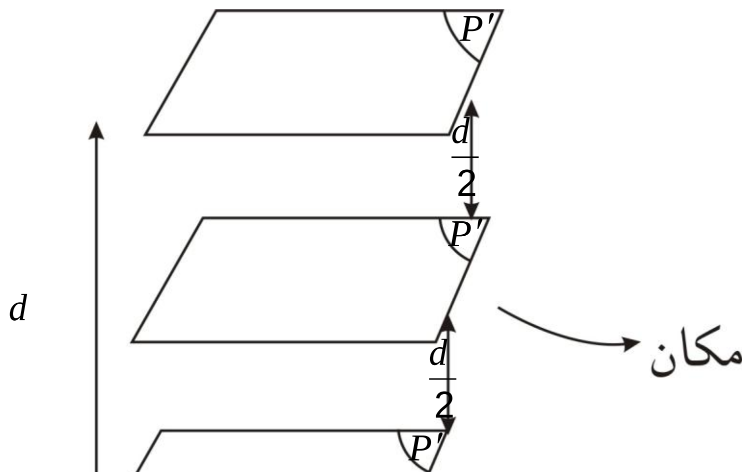
3- مکان موردنظر صفحه عمودمنصف پاره خط است یعنی صفحه ای که از وسـط پـاره خـط بگذرد و بر پاره خط عمود باشد.



* وقتی فاصله از دو سر پاره به یک فاصله باشد عمودمنصف (صفحه)

* وقتی فاصله از دو سر پاره به یک فاصله باشد صفحه است. (فضا)

4- مکان موردنظر صفحه ای است موازی دو صفحه ی مفروض که فاصله ی این صفحه تا دو صفحه ی مفروض به یک اندازه و برابر نصف فاصله ی بین دو صفحه ی مفروض است.



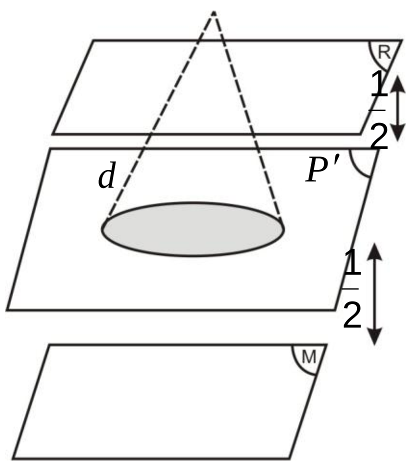
5- این مکان از تلاقی دو مکان تشکیل خواهد شد:

مکان اول: مکان هندسی نقاطی در فضا که از دو صفحه $M\ ,R$ بـه یـک فاصـله باشـدماننـد سؤال صفحه مانند P' است که موازی دو صفحه ی $M\ ,R$ و به فاصله ی $\frac{L}{2}$ (نصف فاصله $M\ ,R$) از دو صفحه قرار دارد.

مکان دوم: مکان هندسی نقاطی است که از نقطه ی p به فاصله ی d باشد که ایـن مکـان نیـز کره ای به مرکز p و به شعاع d می باشد.

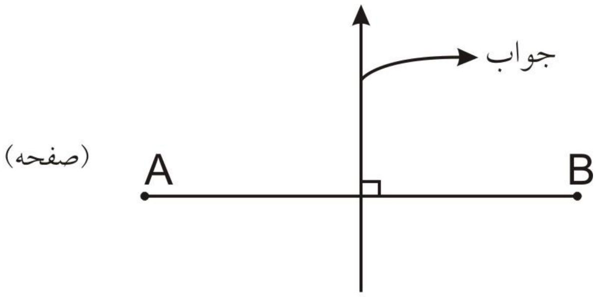
مکان موردنظر مسئله محل تقاطع دو مکان (کره و صفحه ی P') می باشد کـه تقـاطع بـه سـه صورت ممکن است اتفاق بیفتد:

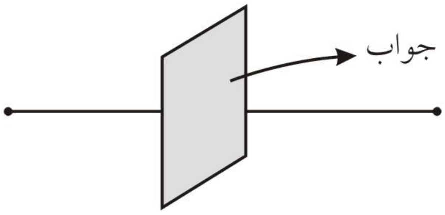
حالت اول: محل تقاطع کره و صفحه ی P' یک نقطه باشد در این حالت صفحه P' و کره بر هم مماس شوند.



حالت دوم: محل تقاطع کره و صفحه ی p بیش از یک نقطه باشد در این حالت سـطح تمـاس یک دایره است.

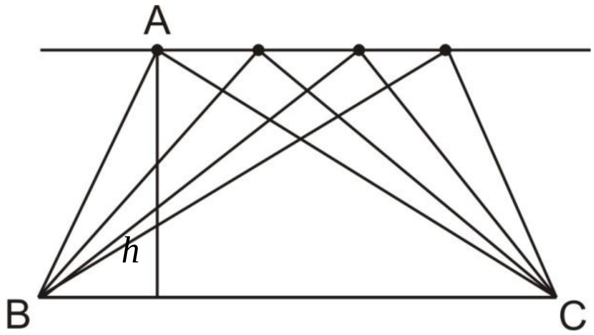
حالت سوم: کره و صفحه ی P' متقاطع نباشد. در این صورت مکانی وجود ندارد.





√ مثال: مکان هندسی رأس مثلثهایی را پیدا کنید که قاعده ی مشترک و مساحت های مساوی دارند.

فرض می کنیم فاصله ی رأس A از قاعده ی BC برابر h باشد:



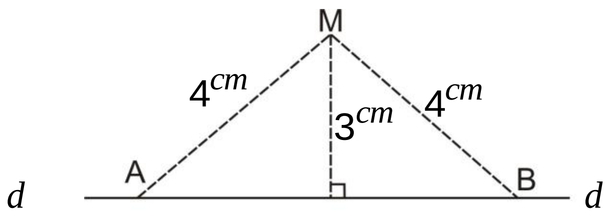
1) تعدادی مثلث رسم می کنیم بطوریکه فاصله رأس آنها از ضلع BC برابر h باشد.

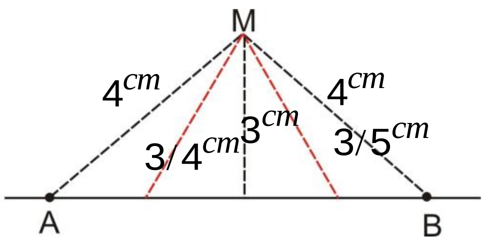
2) این نقاط را بهم وصل میکنیم شکل حاصل یک خط راست است.

3) مکان هندسی فوق خطی است موازی با خط مفروض و به فاصله ی h از آن است.

مثال:

نقطه ی M به فاصله 3^{cm} از خط مفوض d واقع است مکان هندسی نقطه ای از خط d را بیابید بطوریکه فاصله ی آن تا نقطه ی M به صورت: $3 \le x \le 4$ باشد.





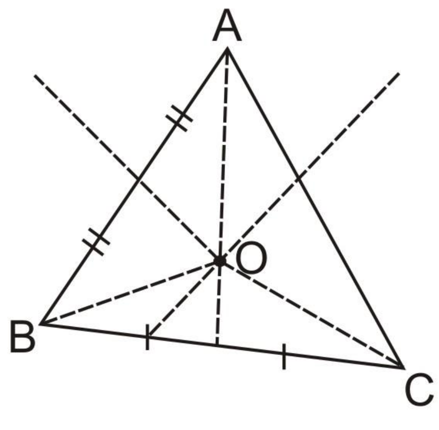
به مرکز M و به شعاع 4^{cm} کمانی می زنیم تا خط مفوض d را در نقاط A , B قطع کند.

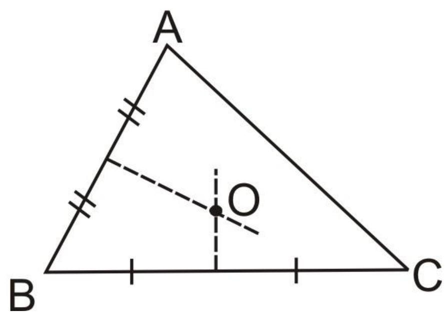
پاره خط AB جواب مسئله است. (هر نقطه روی خط d، در بازه AB انتخاب شود $4^{cm} \le x \le 3^{cm}$ می باشد).

قضایای هموسی (سؤال خرداد)

(مهم)

1) نشان دهید سه عمودمنصف اضلاع هر مثلث هموسند.





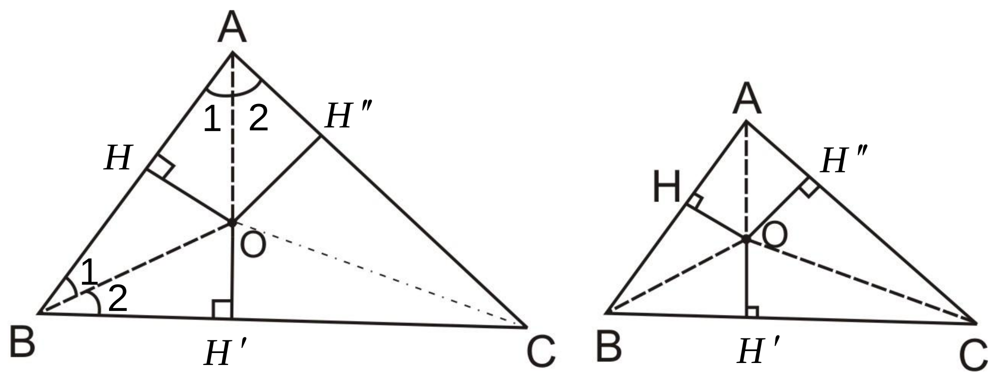
ابتدا عمودمنصف اضلاع AB , BC را رسم می کنیم تا دو نقطه O یکدیگر را قطع کنند.

کافی است ثابت کنیم عمودمنصف ضلع AC هم از نقطه ی O می گذرد.

* می دانیم هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره خط از دو سر آن پاره خط به یک اندازه است.

$$\left.\begin{array}{l} O \in AB \quad \text{عمودمنصف} \Rightarrow OA = OB \\ O \in BC \quad \text{عمودمنصف} \Rightarrow OB = OC \end{array}\right\} \Rightarrow OA = OC \Rightarrow O \in AC$$

2) (مهم) نشان دهید سه نیم ساز زوایای داخلی هر مثلث هموسند.

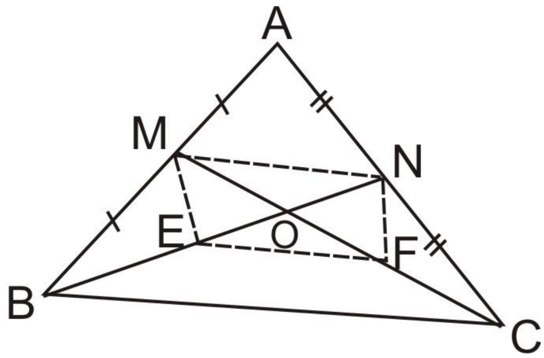


ابتدا نیم سازهای داخلی $\hat{B}\,,\hat{A}$ را رسم می کنیم تا دو نقطه ی O یکدیگر را قطع کنند کافی است ثابت کنیم نیم ساز زاویه ی $\hat{C}$ هم از نقطه ی O می گذرد.

* می دانیم هر نقطه روی نیم ساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.

$$\left.\begin{array}{l} O \in \hat{A} \quad \text{نیم ساز} \Rightarrow OH = OH' \\ O \in \hat{B} \quad \text{نیم ساز} \Rightarrow OH = OH'' \end{array}\right\} \Rightarrow OH' = OH'' \Rightarrow O \in \hat{C} \ \text{نیم ساز}$$

3) (مهم) نشان دهید سه میان اضلاع هر مثلث هموسند.



ابتدا میانه های نظیر رئوس $\hat{C}\,,\hat{B}$ را رسم می کنیم تـا در نقطـه ی O همـدیگر را قطـع کننـد کافی است ثابت کنیم میانه های نظیر رأس A هم از نقطه ی O می گذرد.

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{1}{2}\\[2ex]\dfrac{AN}{AC}=\dfrac{1}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\quad \frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}\xrightarrow{\text{بنا به عکس تالس}}MN\parallel BC$$

$$(1)\qquad \frac{MN}{BC}=\frac{1}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{OE}{OB}=\dfrac{1}{2}\\[2ex]\dfrac{OF}{OC}=\dfrac{1}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\quad \frac{OE}{OB}=\frac{OF}{OC}\xrightarrow{\text{بنا به عکس تالس}}EF\parallel BC$$

$$(2)\quad \frac{EF}{BC}=\frac{1}{2}$$

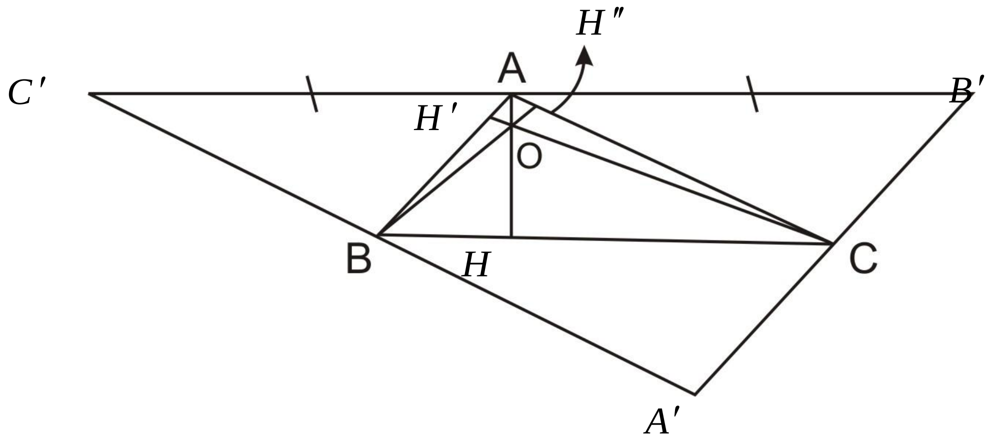
$$(1)\,(2)\qquad \Rightarrow MN=EF\Rightarrow MNEF\Rightarrow MO=OF=FC$$

$$NO=OE=EB$$

به عبارتی در میانه ی نظیر رئوس $C\,,B$ یکدیگر را به نسبت $\frac{1}{2}$ قطع می کنند حال اگـر هـر یک از این دو میانه را با میانه ی نظیر رئوس A در نظر بگیریم چون به نسبت $\frac{1}{2}$ متقاطع اند.

بنابراین میانه ی نظیر رأس A حتماً از 0 می گذرد.

4) نشان دهید سه ارتفاع هر مثلث هموسند.



از رئوس $A\,,B\,,C$ خطوطی موازی با اضلاع روبرو رسم می کنیم تا مثلث $A'B'C'$ پدیـد آید.

$$\left.\begin{array}{l} AB' \parallel BC\ ,B'C \parallel AB \Rightarrow ABCB' \Rightarrow AB' = BC \\ \\ AC' \parallel BC\ ,\ BC' \parallel AC \Rightarrow ACBC' \Rightarrow AC' = BC \end{array}\right\} \overset{(1)}{\Rightarrow AB' = AC'}$$

$$B'C' \parallel BC\ ,AH \perp BC \Rightarrow \underset{(2)}{AH \perp B'C'}$$

AH (ارتفاع- عمودمنصف)

AH عمودمنصف ضلع $B'C'$ است. $(1)\ .\ (2) \Rightarrow$

به همین طریق ثابت می شود CH' عمودمنصف $A'B'$ و BH'' عمودمنصف $A'C'$ است

می دانیم سه عمودمنصف اضلاع سه مثلث هموسند از طرفی چون این سه عمودمنصف برای مثلث ABC ارتفاع هستند نتیجه می شود سه ارتفاع مثلث هموسند.

روش حل مسائل ترسیمی:

1) مسأله را حل شده فرض کرده شکلی رسم می کنیم.

2) حل مسأله را تبدیل به یافتن یک نقطه ی مجهول می کنیم.

3) شرط های مسأله را به دو قسمت تقسیم می کنیم به طوری که هر قسمت یک مکان هندسی باشد. (سه مکان هندسی یک خط راست یا کمان است).

4) اشتراک دو مکان هندسی همان نقطه ی مجهول یا جواب مسأله است.

* نکته: مثلث های زیر با معلومات داده شده قابل رسم است.

- مثلثی که سه ضلع آن معلوم باشد.

- مثلثی که دو ضلع و زاویه ی بین آن ها معلوم باشد.

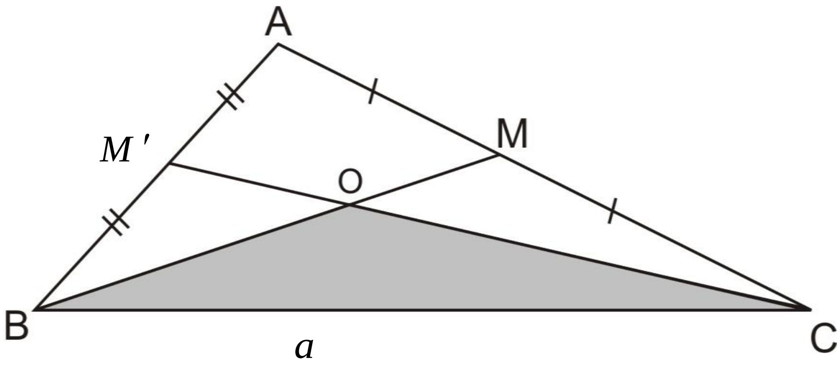
- مثلثی که دو زاویه و ضلع بین آن ها معلوم باشد.

- مثلث قائم الزاویه با معلوم بودن وتر و یک ضلع زاویه قائمه.

مثال (مهم)

مثلث ABC را با معلوم بودن $BC = a$ و میانه های $CM' = mc \ , \ BM = mb$ رسم کنید؟ (وقتی یک ضلع و دو میانه داده شود)

ابتدا مسأله را حل شده فرض کرده و شکلی را رسم می کنیم:

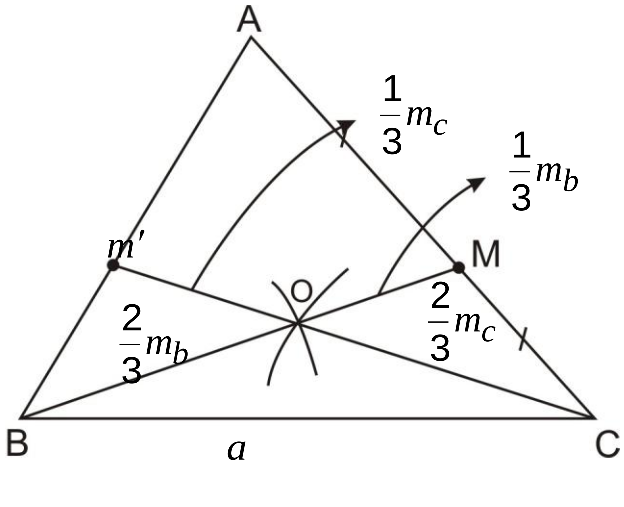


با توجه به شکل داریم:

$$\begin{cases} BC = a \\ BO = \frac{2}{3}m_b \\ CO = \frac{2}{3}m_c \end{cases}$$

بنابراین مثلث $\overset{\Delta}{BOC}$ با معلوم بودن سه ضلع مقابل قابل رسم است:

پس از رسم مثلث، BO را به اندازه نصفش امتداد می دهیم تـا نقطـه ی M بدسـت مـی آیـد سپس CO را از طرف O را به اندازه ی نصفش امتداد می دهیم تا نقطه ی M' بدست آید.

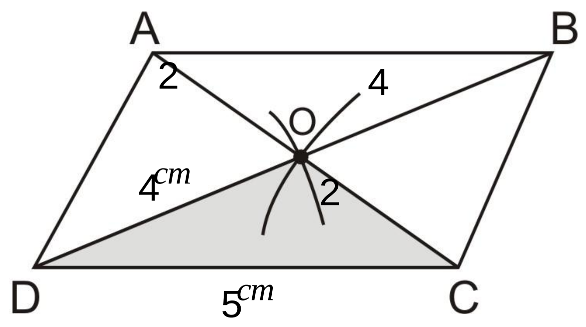


B را به M' وصل کرده تا امتداد CM را در نقطه ی A قطع کند مثلث ABC جواب مسأله خواهد بود.

قطر بزرگ   قطر کوچک

* مثال: متوازی الاضلاعی رسم کنید که قطرهایش 8 , 4 و یک ضلع آن 5^{cm} باشد.

ابتدا مسأله را حل شده فرض کرده و شکلی را رسم می کنیم.



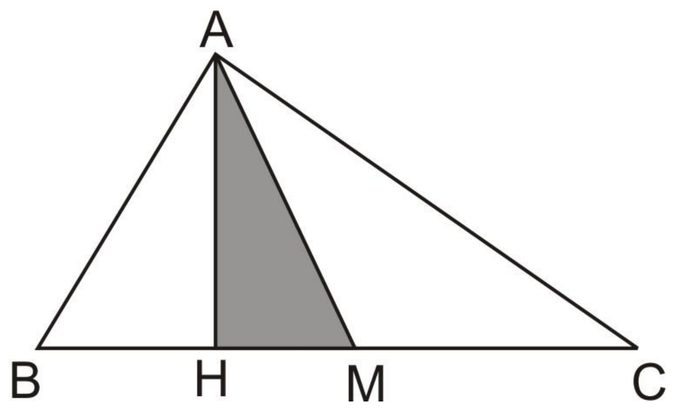
با توجه به شکل مثلث $\overset{\Delta}{ODC}$ با معلوم بودن اندازه های سه ضلع قابل رسم است پس از رسم، DO را از طرف به اندازه ی خودش امتداد می دهیم تا نقطه ی B بدست آید و همچنین CO را از طرف O به اندازه ی خودش امتداد می دهیم تا نقطه ی A بدست آید.

چهارضلعی ABCD جواب مسأله است.

مثال: (مهم)

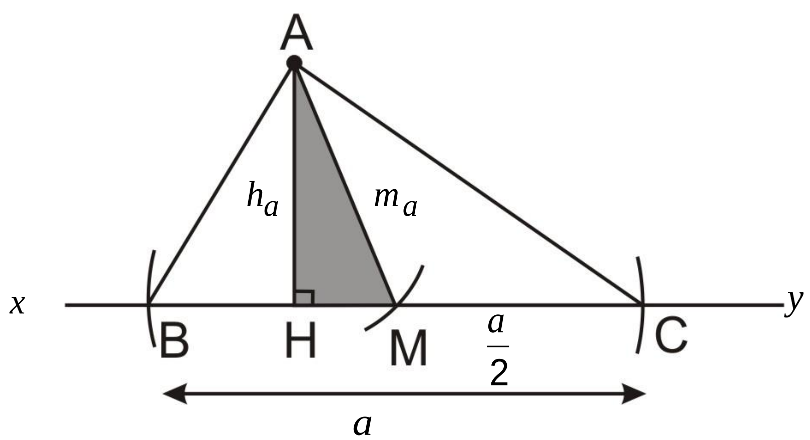
مثلث ABC را با معلوم بودن ضلع $BC = a$ و میانه ی $AM = m_a$ و ارتفاع $AH = h_a$ رسم کنید؟ (یک ضلع – میانه – ارتفاع).

√   √√   √√√



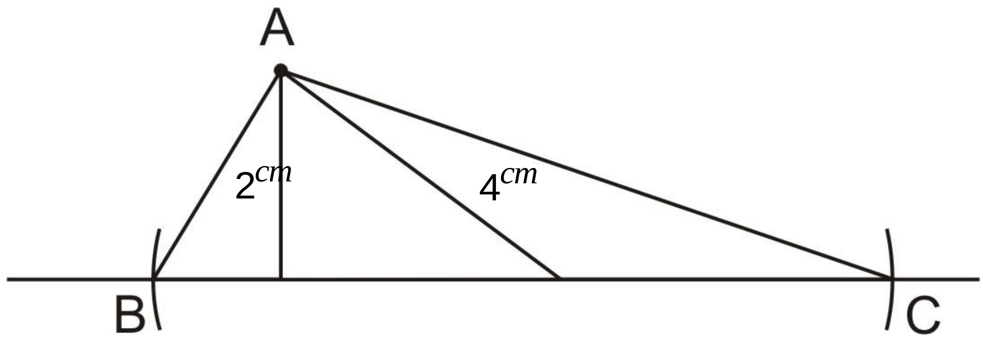
ابتدا مسأله را حل شده فرض می کنیم و شکلی را رسم می کنیم، با توجه به شکل مثلث قـائم الزاویه AHM با معلوم بودن وتر و یک ضلع زاویه قائمه قابل رسم است.

چون AM میانه: $BM = MC$ است.



پس از رسم مثلث AHM به مرکز M و شعاع $\frac{a}{2}$ کمانی مـی زنـیم تـا نـیم خـط MX را در نقطه ی B و نیم خط My را در نقطه ی C قطع کند. مثلث ABC جواب مسئله است.

$$BC = 9^{cm}$$
$$Am = 4^{cm}$$
$$AH = 2^{cm}$$



مثال (مهم):

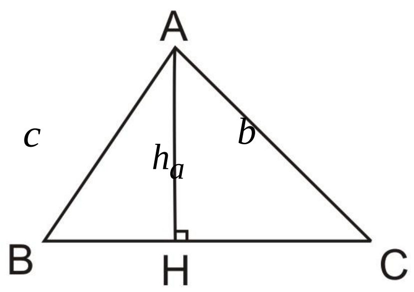
مثلــث ABC را بــا معلــوم بــودن انــدازه ی (هــای) ضــلع $AB = C$, $Ac = b$ و

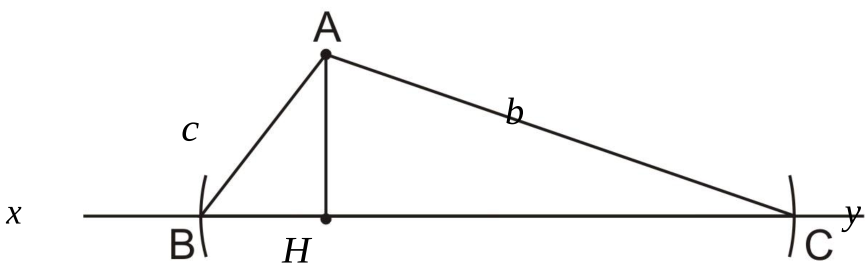
ارتفاع $AH = h_a$ را رسم کنید؟ (ضلع – ضلع – ارتفاع)
√ √√ √√√

ابتدا مسأله را حل شده فرض می کنیم و شکلی را رسم می کنیم.

دو مثلث قائم الزاویه AHC , AHB با معلوم بودن وتر و یک ضلع زاویه ی قائمه قابل رسـم

است.





روی خط دلخواه xy نقطه ی H را انتخاب می کنیم.

در نقطه ی H عمودی به طول معلوم h_a بر آن وارد می کنیم تا نقطه ی A بدست آید.

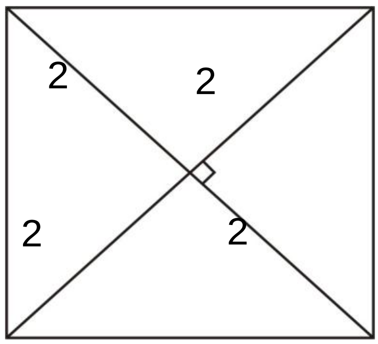
از مرکز A به شعاع معلوم C کمانی می زنیم تا نیم خط Hx را در نقطـه ی B قطـع کنـد بـه مرکز A و به شعاع معلوم b کمان دیگری می زنیم تا نیم خط Hy را در نقطه ی c قطع کند.

مثلث ABC جواب مسئله است.

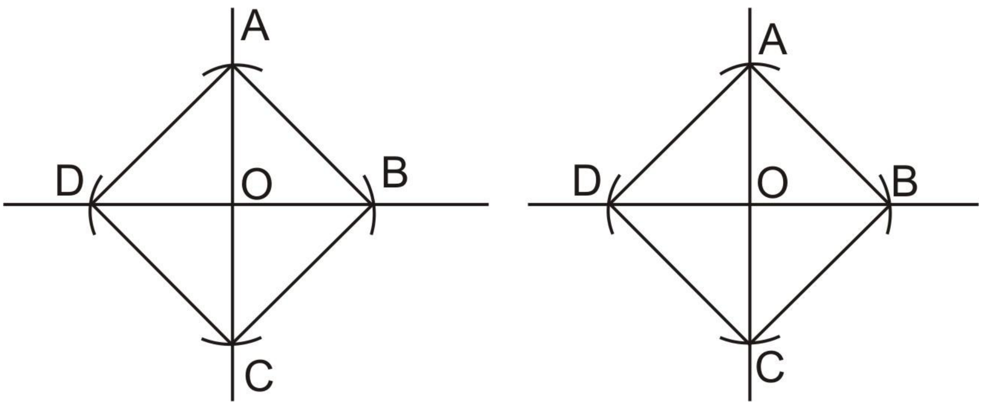
مثال: مربعی را رسم کنید که طول قطر آن 4^{cm} باشد.

ابتدا مسأله را حل شده فرض می کنیم.

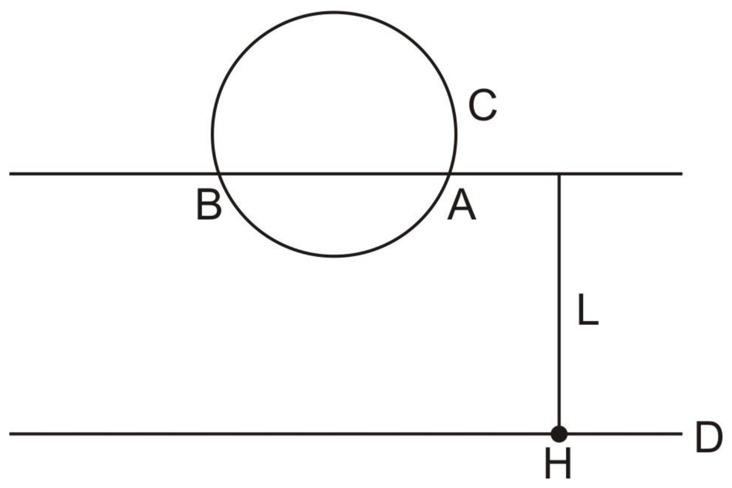
شکلی را رسم می کنیم.



می دانیم در مربع قطرها یکدیگر را نصف می کننـد (عمودمنصـف یکدیگرنـد) ابتـدا دو خـط عمود بر هم رسم می کنیم تا در نقطه ی O یکدیگر را قطع کنند به مرکز O و به شـعاع 2^{cm} کمانی هایی را رسم می کنیم تا دو خط عمود بـر هـم را در نقـاط D , C , B , A قطـع کنـد چهارضلعی ABCD جواب مسأله است.



مثال: خط Δ و دایره ی (c) در یک صفحه مفروض‌اند نقاطی از دایره (c) پیدا کنید کـه از خط Δ به فاصله ی L واقع باشد. مسأله چند جواب دارد.



روی خط Δ نقطه ی H را انتخاب کرده و در این نقطه عمودی بطول L بر آن خـط وارد مـی کنیم سپس از انتهای عمود خطی موازی با خط Δ رسم می کنیم سه حالت مـی توانـد وجـود داشته باشد:

1. اگر خط موازی دایره ی (c) دو نقطه قطع کند مسأله دو جواب دارد.
2. اگر خط موازی دایره ی (c) را در یک نقطه قطع کند مسأله یک جواب دارد.
3. اگر خط موازی دایره ی (c) قطع کند مسأله جواب ندارد.